Cónicas

1.- Circunferencia

Definición 1 (Definición geométrica)
Se llama *Circunferencia* al lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Analíticamente la circunferencia viene representada por la ecuación

Ecuación de la circunferencia.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

que representa la circunferencia de radio r y centrada en el punto (a, b). Equivalentemente podremos escribir la ecuación de una circunferencia, simplemente operando la ecuación anterior, como

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde

$$D = -2a, \quad E = -2b, \quad F = a^2 + b^2 - r^2.$$

Escrita de esta forma las coordenadas del centro y el valor del radio son:

$$(a, b) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \quad \text{y} \quad r = \sqrt{D^2/4 + E^2/4 - F}.$$

Observamos que para que esta última ecuación represente una circunferencia se debe cumplir que

$$D^2 + E^2 - 4F \geq 0.$$

Ejercicio 1 Calcular el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

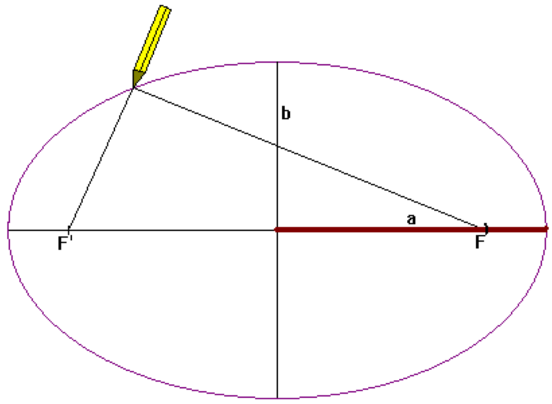
Ejercicio 2 Averiguar si la ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0,$$

representa una circunferencia.

2.- Elipse

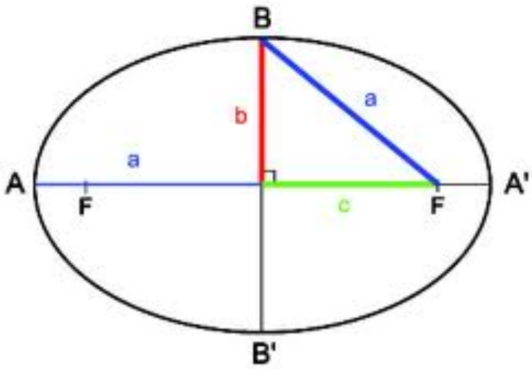
Definición 2 (Definición geométrica)
Se llama *Elipse* al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.



Los puntos F y F' representan los focos de la elipse y la recta que pasa por estos el *eje focal*. Por definición diremos que para cualquier punto P sobre la elipse la suma de los radios vectores $\vec{PF}$ y $\vec{PF'}$ es constante

$$\|\vec{PF}\| + \|\vec{PF'}\| = \text{constante}.$$

La *distancia focal* es el segmento $\vec{FF'}$ y tiene una longitud de $2c$. Por otro lado , los ejes tienen una longitud de $2a$ para el eje mayor y $2b$ para el menor.



Relación entre las constantes

Geométricamente podemos deducir que

$$\|\vec{PF}\| + \|\vec{PF'}\| = 2a,$$

por lo tanto

$$\|\vec{BF}\| = \|\vec{BF'}\| = a \quad \text{y} \quad c < a.$$

Debemos tener en cuenta un concepto muy importante de las elipse, la *excentricidad*, que mide el achatamiento de éstas. Se define como

$$e = \frac{c}{a}, \quad c < a.$$

Observamos que si $c = 0$ tendremos una circunferencia. En cambio cuanto más cercano a uno sea la excentricidad tendremos una elipse más achatada.

Analíticamente la elipse viene determinada a través de los focos

$$F' = (-c, 0) \quad \text{y} \quad F = (c, 0).$$

Puesto que para cualquier punto $P = (x, y)$ sobre la elipse se cumple que

$$\|\vec{PF}\| + \|\vec{PF'}\| = 2a,$$

deducimos que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Si ahora utilizamos que

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

operando la anterior igualdad llegamos a que

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

de donde obtenemos

Ecuación de la elipse.

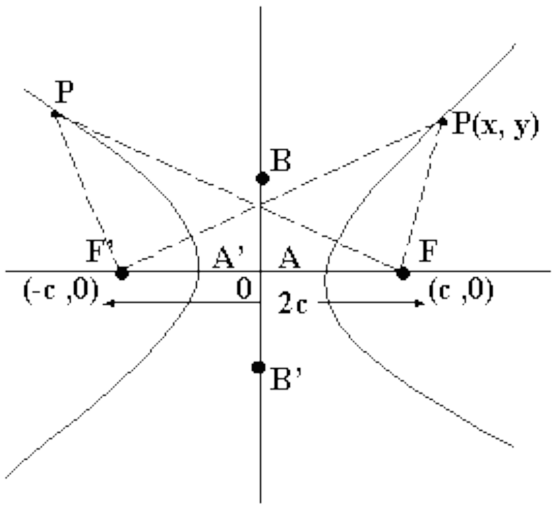
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Ejercicio 3 Ecuación de la elipse de focos $F' = (-2, 0)$ y $F = (2, 0)$ cuya suma de distancias a un punto es 7.

Ejercicio 4 Ecuación de la elipse de eje mayor 16 y excentricidad $e = \frac{1}{4}$.

3.- Hipérbola

Definición 3 (Definición geométrica)
Se llama *Hipérbola* al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.



Análogamente a como hicimos para definir la elipse diremos que para cualquier punto P sobre la hipérbola la diferencia de los radios vectores $\vec{PF}$ y $\vec{PF'}$ es constante

$$\|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| = \text{constante},$$

siendo los elementos geométricos de la hipérbola similares a los de la elipse.

Puesto que para cualquier punto P la diferencia de los radios vectores es constante, tomando el vértice A

$$\|\vec{AF'}\| - \|\vec{AF}\| = \|\vec{F'A'}\| + \|\vec{AA'}\| - \|\vec{AF}\| = \|\vec{AA'}\| = 2a,$$

por lo tanto

$$\|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| = 2a.$$

En el caso de la hipérbola la excentricidad mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola y se define como

$$e = \frac{c}{a}, \quad c > a.$$

En este caso cuando $c \to a$ la excentricidad $e \to 1$ lo que significa que las dos ramas se cierran cada vez más y se aproximan a las semi-rectas de origen A' y A y contenidas en el eje focal. Por otro lado, si $c \to \infty$ la excentricidad $e \to \infty$ y las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas perpendiculares al eje focal en A' y A.

Analíticamente la hipérbola viene de nuevo determinada a través de los focos

$$F' = (-c, 0) \quad \text{y} \quad F = (c, 0).$$

y la relación

$$\|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| = 2a.$$

De esta forma

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Operando esa igualdad y utilizando el hecho

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

obtendremos

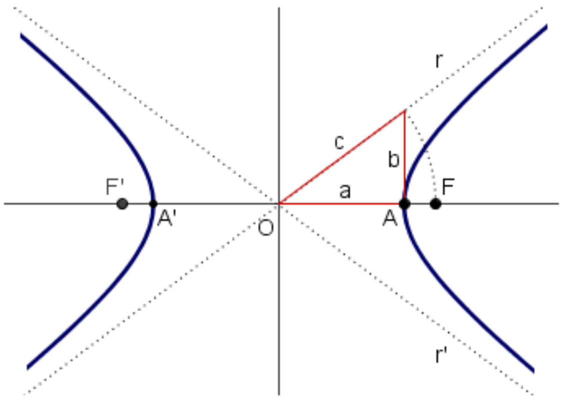
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

y por lo tanto

Ecuación de hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

De hecho la relación entre a, b y c se obtiene trazando una circunferencia de centro el origen y radio la distancia focal. Entonces, la cantidad b viene determinada por el corte entre la recta vertical que trazamos desde el punto A y esa circunferencia de radio c.



Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Observamos que el punto de corte que nos determina b está sobre la asíntota por definición.

Ejercicio 5 Ecuación de la hipérbola de focos $F' = (-5, 0)$ y $F = (5, 0)$ y cuya diferencia de distancias a un punto es 8.

Ejercicio 6 Ecuación de la hipérbola de eje mayor 8 y excentricidad $e = \frac{5}{4}$.

Definición 4 (Hipérbola equilátera)

Se dice que una hipérbola es equilátera cuando $a = b$. En este caso

$$c = a\sqrt{2},$$

la excentricidad es $\sqrt{2}$ y las asíntotas son perpendiculares. De hecho, si la ecuación de la hipérbola equilátera viene dada por la expresión

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

las asíntotas serán las bisectrices de los cuadrantes

$$y = x, \qquad y = -x.$$

Girando la hiérbola equilátera 45 grados se comprueba que

$$\|\vec{OA}\| = a, \quad \|\vec{OF}\| = c = a\sqrt{2}, \quad F' = (-a, -a), \quad F = (a, a).$$

Entonces,

$$\|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| = 2a \Rightarrow \|\vec{PF'}\| = 2a + \|\vec{PF'}\|.$$

Además, por construcción

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow x + y - a = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

Por lo tanto

$$xy = k,$$

ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas.

Ejercicio 7 La función $y = \frac{1}{x}$ es un hipérbola equilátera. Calcula sus focos y sus vértices.

4.- Parábola

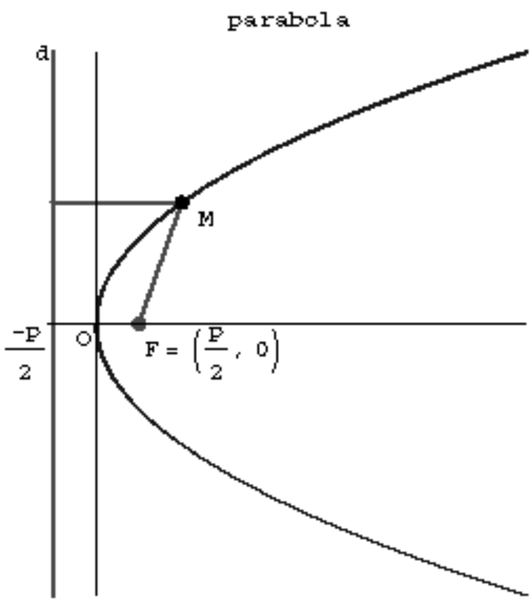
Definición 5 (Definición geométrica)
Una *p*arábola es el conjunto de puntos equidistantes de un punto F, llamado foco, y de una recta d, llamada directriz.

Para obtener la ecuación reducida de la parábola, se considera como foco el punto $F = (p/2, 0)$ y como directriz la recta vertical $x = -p/2$. El punto $M = (x, y)$ del plano pertenecerá a la parábola si verifica

$$d(M, F) = d(M, \text{recta directriz}),$$

es decir,

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$



Por lo tanto, una vez realizadas las operaciones pertinentes obtendremos

Ecuación de la parábola.

$$y^2 = 2px,$$

Por otro lado, se llama eje de una parábola a su eje de simetría y vértice al punto de la parábola que pertenece al eje. El eje de la parábola $y^2 = 2px$ es el eje de abscisas ó eje OX y el vértice es el origen de coordenadas.

Ejercicio 8 Escribir la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto $(5, 0)$ y vértice en el origen.

En general la ecuación de la parábola viene determinada por la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c,$$

cuyo eje es vertical. En particular esta parábola tiene por eje la recta vertical $x = -b/2a$, y el vértice es el punto de intersección de la parábola y su eje. Observamos que si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba y que si $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

De forma análoga si definimos la parábola con el eje horizontal (como se hizo con anterioridad) la ecuación general sería

$$x = ay^2 + by + c.$$

Pablo Álvarez Caudevilla, Cristina Brändle Cerquiera

Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería

Universidad Carlos III de Madrid