Trigonometría

1.- Ángulos

En la medida de ángulos, y por tanto en trigonometría, se emplean dos unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el *grado sexagesimal*, en matemáticas es el *radián* la más utilizada, y se define como la unidad natural para medir ángulos.

Definición 1 (Radián)
Un *radián* se define como la medida de un ángulo central θ, cuyos lados cortan un arco s, igual en longitud al radio r, en la circunferencia del círculo,
$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Como el perímetro de una circunferencia de radio r es $2\pi r$ se deduce que el ángulo central de una revolución completa medida en el sentido contrario a las agujas del reloj es
$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \,\mathrm{rad}.$$

Definición 2 (Grado sexagesimal)
Un *grado sexagesimal* es el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia. Es la nonagésima, $\frac{1}{90}$, parte de un ángulo recto.

Así una revolución completa corresponde a un ángulo de 360° medido en el sentido contrario a las agujas del reloj. Como 2π radianes corresponde también a una revolución completa, los grados y los radianes están relacionados mediante la fórmula
$$x^{\mathrm{o}} = \left(\frac{x \cdot 2\pi}{360}\right) \mathrm{rad}, \qquad y \,\mathrm{rad} = \left(\frac{y \cdot 360}{2\pi}\right)^{\mathrm{o}}$$

Ejercicio 1 Realizar las conversiones de grados a radianes y de radianes a grados de los siguientes ángulos:

1. 135^{o}
2. 270^{o}
3. $\frac{\pi}{6}$ rad
4. $\frac{\pi}{3}$ rad

Ejemplo 2 Una circunferencia tiene radio 3 cm. Determinar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 240°.

Como $\theta = \frac{s}{r}$, siendo θ el ángulo, medido en radianes, s la longitud del arco y r el radio de la circunferencia, sabemos que $s = \theta r$. En primer lugar, por tanto, calculamos
$$240^{\mathrm{o}} = \left(\frac{240 \cdot 2\pi}{360}\right) \mathrm{rad} = \frac{4\pi}{3} \,\mathrm{rad}.$$
Como el radio de la circunferencia es 3 cm, obtenemos
$$s = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi \,\mathrm{cm} \approx 12.57.$$

Ejercicio 3 Sabiendo que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$, calcular el área de un sector de ángulo central θ.

2.- Funciones trigonométricas

2.1. El círculo unitario

Las funciones trigonométricas se basan en una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto de puntos del *círculo unitario*. El círculo unitario es un círculo de radio 1 con centro en el origen del sistema de coordenadas, esto es, el punto $(0, 0)$ y su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Cada número real de la recta real se asocia con las coordenadas de un punto en el círculo unitario llamado punto circular. Como el círculo unitario tiene una circunferencia de longitud 2π, el número 2π también corresponde al punto $(1, 0)$. De manera que, los puntos circulares correspondientes en los ejes coordenados son,

$$P(0) = (1, 0), \quad P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1), \quad P(\pi) = (-1, 0), \quad P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1).$$

en general, a cada número t de la recta real, le corresponde un punto (x, y) sobre el círculo unitario al que se le asocia un ángulo central θ, con medida, en radianes, igual a t.

A partir de las coordenadas (x, y) asociadas a t se definen las funciones trigonométricas.

Definición 3 (Funciones trigonométricas en el círculo unitario)
Sea t un número real y sea (x, y) el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y, \qquad \cos t = x, \qquad \tan t = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

De hecho, la posición de un objeto en el plano se puede determinar por las coordenadas cartesianas

$$(x, y),$$

o suponiendo que ese objeto se encuentra sobre una circunferencia de radio r. En primer lugar tenemos en cuenta el sentido en el que tomamos el ángulo, es decir, positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj y negativo en sentido contrario. De esta forma tendremos que las coordenadas del objeto serán

$$x = r\cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t,$$

siendo t el ángulo que forma la recta que une el origen con el objeto que tenemos en el plano y el eje de abscisas. Estas nuevas coordenadas es lo que vamos a denominar coordenadas polares.

2.2. Triángulos rectángulos

Las funciones trigonométricas también se pueden definir desde la perspectiva de los triángulos rectángulos. Consideremos para ello un triángulo rectángulo con un ángulo agudo, θ. Con respecto a este ángulo, los lados del triángulo son la hipotenusa, el cateto adyacente (que junto con la hipotenusa forma el ángulo θ) y el cateto opuesto. A partir de estos lados definimos las razones trigonométricas (es importante tener en cuenta que θ es un ángulo del primer cuadrante, es decir $0^o < \theta < 90^o$).

Definición 4 (Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo)
Sea θ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Definimos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cat.op}}{\text{hip}}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{cat.ady}}{\text{hip}}, \qquad \tan\theta = \frac{\text{cat.op}}{\text{cat. ady}},$$

donde cat.op es la longitud del cateto opuesto, cat.ady la del cateto adyacente e hip. es la longitud de la hipotenusa.

Es fácil relacionar las identidades definidas en el triángulo rectángulo con el círculo unitario. Basta con ver que en el primer cuadrante, el punto (x, y) del círculo unitario forma un triángulo rectángulo de hipotenusa igual al radio (es decir 1), cateto opuesto igual a y y cateto contiguo igual a x.

Ejemplo 4 Determinar las razones trigonométricas asociadas a $\theta = 45^o$.

Dado que los ángulos interiores de un triángulo tienen que sumar 180^o, el ángulo opuesto a $\theta = 45^o$ en el triángulo rectángulo, también tiene que ser un ángulo de 45^o y el triángulo es isósceles. Supongamos que los catetos miden 1 y por tanto, la hipotenusa, por el teorema de Pitágoras mide

$$\text{hip}^2 = \text{cat}^2 + \text{cat}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{hip} = \sqrt{2}.$$

Así

$$\text{sen}(45^o) = \frac{\text{cat.op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(45^o) = \frac{\text{cat.ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan(45^o) = \frac{\text{cat.op}}{\text{cat.ady}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejercicio 5 Dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ y a partir de él deducir las siguientes razones trigonométricas

$$\text{sen}(90^o - \theta), \qquad \cos(90^o - \theta), \qquad \tan(90^o - \theta).$$

en función de las razones del ángulo θ.

Utilizando la geometría del triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras es fácil ver que

Identidades trigonométricas.

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}, \qquad \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

que se consideran las relaciones fundamentales en trigonometría.

Ejemplo 6 Dado un ángulo agudo θ del cual se sabe que $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$. Calcular el valor de $\cos\theta$.

Utilizando el teorema de pitágoras sabemos que

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\theta, \qquad \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.3. Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

Hemos definido las funciones trigonométricas restringiéndonos a ángulos agudos. Extender las definiciones a cualquier ángulo es fácil si se tiene en cuenta la definición de las relaciones trigonométricas en el círculo unitario.

Definición 5 (Funciones trigonométricas para ángulos generales)
Sea θ un ángulo orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj y sea (x, y) un punto cualquiera en el lado terminal de θ con $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$, entonces

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \; x \neq 0.$$

Ejemplo 7 Sea $(-3, 4)$ un punto en el lado terminal de θ. Determinar $\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Calculamos en primer lugar

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Entonces

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}, \; x \neq 0.$$

Obsérvese que en este ejemplo θ es un ángulo situado en el segundo cuadrante.

Ejercicio 8 A la vista del ejemplo anterior determinar los signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante.

Ejemplo 9 Dadas $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y $\cos\theta < 0$, determinar $\operatorname{sen}\theta$.

Como
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}, \text{ y } \cos\theta = \frac{x}{r} < 0 \quad \Rightarrow y = \sqrt{3}, \quad x = -1.$$
Por otro lado
$$r = \sqrt{3+1} = 2,$$
y entonces
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos que no estén en el primer cuadrante, es decir ángulos θ tales que $\theta \notin (0, \frac{\pi}{2})$, se pueden determinar a partir de sus valores equivalentes de ángulos que sí están en el primer cuadrante.

Definición 6 (Ángulo de referencia)
Sea θ un ángulo cualquiera orientado en el sentido contrario de las agujas del reloj. El ángulo de referencia de θ es el ángulo agudo θ' formado por el lado terminal de θ y el eje horizontal.

Obsérvese que si

- θ es un ángulo del segundo cuadrante, entonces $\theta = \pi - \theta'$.
- θ es un ángulo del tercer cuadrante, entonces $\theta = \pi + \theta'$.
- θ es un ángulo del cuarto cuadrante, entonces $\theta = 2\pi - \theta'$.

Para ver cómo se utiliza un ángulo de referencia a la hora de calcular una razón trigonométrica de un ángulo arbitrario consideremos el punto (x, y) en el lado terminal del ángulo θ. Sabemos que
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}.$$
Para el ángulo de referencia θ' tenemos
$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{|y|}{r}, \qquad \text{y} \qquad \cos\theta' = \frac{|x|}{r}.$$
Por tanto se deduce que $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}\theta'$ son iguales excepto, posiblemente, por el signo. Lo mismo sucede con el $\cos\theta$ y con la $\tan\theta$. En todos los casos, el signo de la razón trigonométrica se puede determinar por el cuadrante en el que se encuentra el ángulo θ.

Ejercicio 10 Haciendo un dibujo del círculo unitario y de ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes, determinar el signo de las razones trigonométricas en dichos cuadrantes.

Ejemplo 11 Sabiendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$ calcular el $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

El ángulo $\frac{7\pi}{6}$ es un ángulo del tercer cuadrante, ya que $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. Por tanto,
$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0.5.$$

Ejercicio 12 A partir de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ calcular
$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

2.4. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Geométricamente es relativamente sencillo probar que, asumidos conocidos los ángulos a y b se puede deducir que

Identidades trigonométricas.

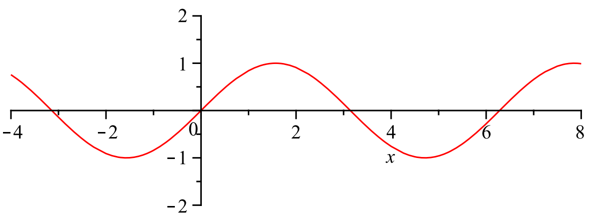
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a, \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

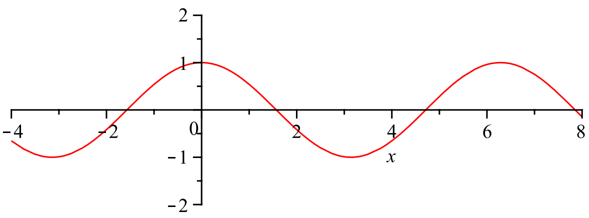
A partir de esas dos relaciones podremos de deducir tanto la correspondiente a la diferencia de ángulos, como las relativas a los ángulos dobles.

3.- Las gráficas de las funciones seno y coseno

Para trazar las gráficas de las funciones seno y coseno a mano es útil marcar los cinco puntos clave en cada periodo: intersecciones con los ejes, puntos de máximo y puntos de mínimo.

Ejercicio 13 Marcar en las siguientes gráficas los puntos clave y determinar sus coordenadas (x, y)





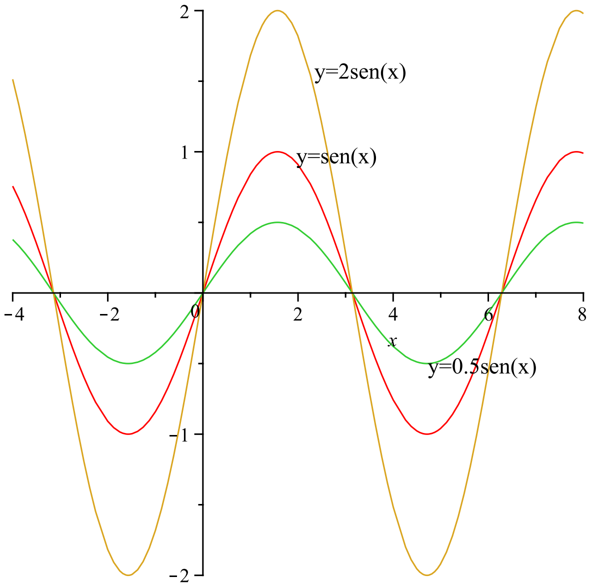
Cuadro 1: Gráficas de las funciones seno y coseno

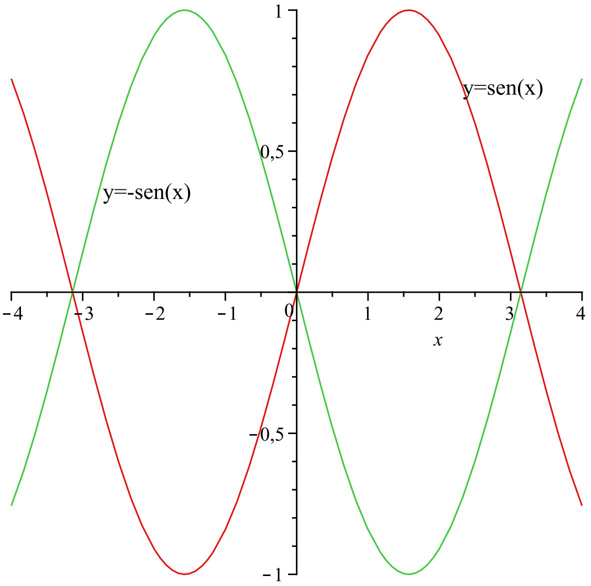
Estudiamos ahora el efecto que tiene en la gráfica de las funciones seno y coseno los parámetros a, b, c y d de la fórmula

$$y = d + a \operatorname{sen}(bx - c), \qquad y = d + a \cos(bx - c).$$

Definición 7 (Amplitud)
La *amplitud* de $y = a \operatorname{sen} x$, $y = a \cos x$ es la mitad de la distancia entre los valores máximo y mínimo de la función y está dada por $|a|$.

Ejercicio 14 En la siguiente gráfica se muestra la función seno con distintas amplitudes. Identificando puntos clave, trazar gráficas similares para la función coseno.





Se observa que $|a|$ es un factor de escala, si $|a| < 1$, la curva se contrae, mientras que si $|a| > 1$ la curva se alarga verticalmente. Si $a < 0$ además de la contracción o alargamiento vertical, al curva se refleja con respecto al eje x.

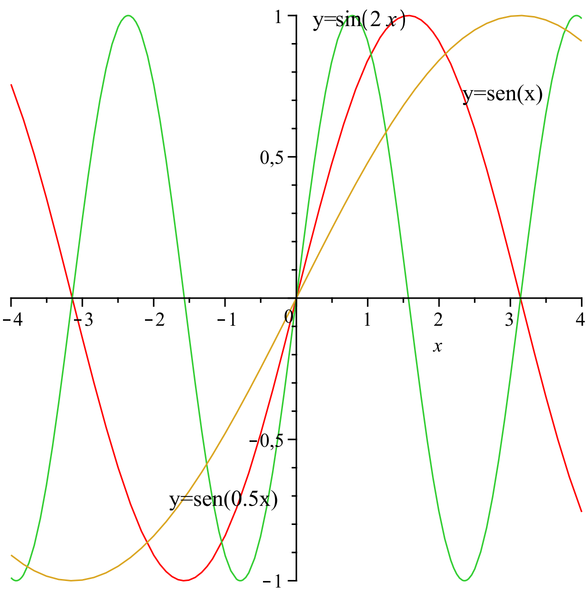
La función $y = a\,\mathrm{sen}(x)$ completa un ciclo de $x = 0$ a $x = 2\pi$.

Ejercicio 15 Dando valores a x trazar la gráfica de $y = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

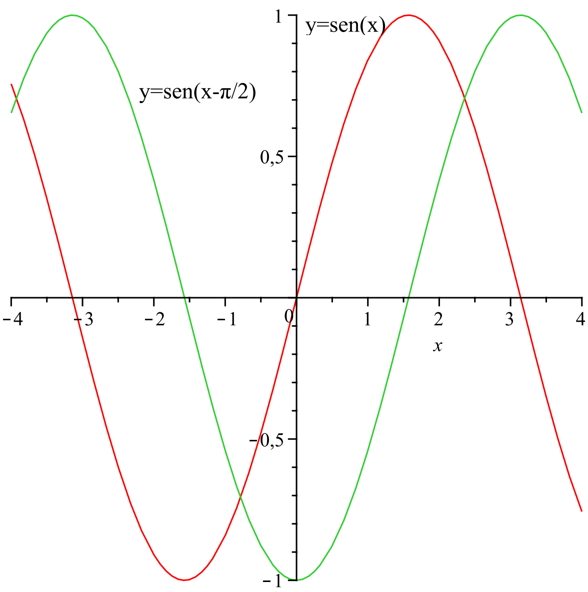
A partir del ejercicio anterior se observa que la función $y = a\,\mathrm{sen}(bx)$ completa un ciclo de $x = 0$ a $x = \frac{2\pi}{b}$.

Definición 8 (Periodo)
Sea b un número real positivo. El periodo de $y = a\,\mathrm{sen}(bx)$, $y = a\cos(bx)$ viene dado por $\frac{2\pi}{b}$.

En la siguiente gráfica se puede observar que si $0 < b < 1$, entonces el periodo de $a\,\mathrm{sen}(bx)$ es mayor que 2π, la función va "más despacio", es una dilatación horizontal de la gráfica de $a\,\mathrm{sen}(x)$. Por otro lado, si $b > 1$ el periodo de $a\,\mathrm{sen}(bx)$ es menor que 2π, la función va "más rápido", es una contracción horizontal de la gráfica de $a\,\mathrm{sen}(x)$.



Ejercicio 16 Trazar las gráficas de $y = \mathrm{sen}(x)$, $y = \mathrm{sen}(x + \pi)$, ¿qué se observa?



La constante c en las ecuaciones $y = a\,\text{sen}(bx - c)$, $y = a\cos(bx - c)$ determina una traslación horizontal de las curvas $y = a\,\text{sen}(bx)$, $y = a\cos(bx)$. La gráfica de $y = a\,\text{sen}(bx - c)$ completa un ciclo desde $bx - c = 0$ hasta $bx - c = 2\pi$. Despejando x se obtiene que el intervalo de un periodo es

$$\frac{c}{b} \leq x \leq \frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}.$$

Definición 9 (Cambio de fase)
El *cambio de fase* de las gráficas $y = a\,\text{sen}(bx - c)$, $y = a\cos(bx - c)$ es la cantidad $\frac{c}{b}$. Significa translación horizontal. Por ejemplo, $y = \cos(x + c)$ está trasladado horizontalmente

hacia la derecha en caso de que $c < 0$,

hacia la izquierda en caso de que $c > 0$.

En caso que $y = \text{sen}(bx + c)$ podemos transformarlo en

$$y = \text{sen}[b(x + c/b)],$$

luego la traslación se produce por el valor absoluto de c/b horizontalmente,

hacia la derecha en caso de que $c/b < 0$,

hacia la izquierda en caso de que $c/b > 0$.

Ejercicio 17 A partir de la gráfica de $\text{sen}(x)$ trazar la gráfica de $y = 2 + \frac{1}{2}\,\text{sen}(3x - \pi)$.

Pablo Álvarez Caudevilla, Cristina Brändle Cerquiera
Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería
Universidad Carlos III de Madrid