

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

**CALIFICACIÓN:** La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

**Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**TIEMPO:** 90 minutos.

### OPCIÓN A

#### Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

- a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.
- b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

#### Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función  $f(x) = e^{3x-2}$ , se pide:

- a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva  $y = f(x)$  tiene pendiente igual a  $\frac{3}{e}$  y escribir la ecuación de esta recta tangente.
- b) (0.5 puntos) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$ .
- c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

#### Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ ,  $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$ , se pide:

- a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.
- b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta  $r_2$  y el plano que contiene a  $r_1$  y pasa por el origen de coordenadas.

#### Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados dos sucesos  $A$  y  $B$ , se conocen las siguientes probabilidades:  $P(A \cup B) = 0.55$ ,  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.90$  y  $P(B|A) = 0.25$ . Se pide:

- a) (2 puntos) Calcular  $P(A \cap B)$ ,  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(B|\bar{A})$ .
- b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz  $A$  en función del parámetro  $t$ .
- b) (1.5 puntos) Resolver el sistema  $AX = B$ , para los valores de  $t$  que lo hagan compatible y determinado.

### Ejercicio 2 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función  $f(x) = \frac{3}{x+1}$ , se pide:

- a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 2$ .
- b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva  $y = f(x)$  y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .
- c) (0.75 puntos) Calcular  $\int_0^2 xf(x) dx$ .

### Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos  $A(1, 1, -2)$ ,  $B(3, -1, 4)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ , se pide:

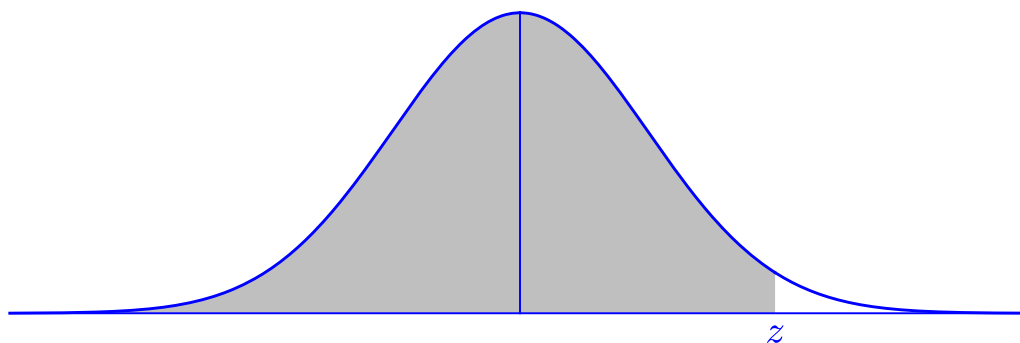
- a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo  $OPQ$ , siendo  $O(0, 0, 0)$ ,  $P$  el punto medio del segmento  $AB$  y  $Q$  la intersección de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  y el plano  $\pi \equiv z = 7$ .
- b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por  $A$  y es perpendicular a la recta  $r$ .
- c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta  $r$  y la recta que pasa por  $A$  y  $B$ .

### Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media  $30^\circ\text{C}$  y varianza 25. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre  $28^\circ\text{C}$  y  $32^\circ\text{C}$ .
- b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a  $36^\circ\text{C}$ .
- c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

# DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si  $Z$  tiene distribución  $N(0, 1)$ ,  $P(Z < 0,45) = 0,6736$ .

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA EJERCICIO

En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

**Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

#### OPCIÓN A

##### Ejercicio 1.

**a)** Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.

**b)** Definir las variables: 0.25 puntos. Plantear el sistema de ecuaciones: 1 punto. Resolver el sistema: 0.5 puntos. Interpretar el resultado: 0.25 puntos. (Si se plantea mal, pero se resuelve correctamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se valorará la resolución.)

**Estándar de aprendizaje evaluado:** Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

##### Ejercicio 2.

**a)** Calcular la derivada: 0.25 puntos. Plantear la ecuación que determina el punto: 0.25 puntos. Calcular el punto: 0.25 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.

**b)** Escribir el límite y ver que es una indeterminación: 0.25 puntos. Obtener el límite: 0.25 puntos.

**c)** Escribir la integral: 0.5 puntos. Obtener la primitiva: 0.25 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

##### Ejercicio 3.

**a)** Posición relativa: 1 punto (repartido en planteamiento: 0.5, resolución: 0.5). Distancia: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25).

**b)** Hallar el plano: 0.5 puntos. Obtener el punto de corte: 0.5 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

##### Ejercicio 4.

**a)** Cada probabilidad pedida se evaluará con 0.5 puntos (repartidos en resultado: 0.25, justificación: 0.25).

**b)** Respuesta correcta: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones.

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1.

- a) Obtener el valor crítico ( $t = 0$ ): 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25, resolución: 0.25). Determinar el rango en cada uno de los dos casos ( $[t = 0]$ ,  $[t \neq 0]$ ): 0.25 puntos.
- b) Deducir ( $t = -1$ ): 1 punto (repartido en planteamiento: 0.5, resolución: 0.5). Resolver el sistema 0.5 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Clasifica y resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

### Ejercicio 2.

- a) Calcular  $f'$ : 0.25 puntos. Obtener la recta tangente: 0.25 puntos. Cortes con los ejes: 0.25 puntos. Área del triángulo: 0.25 puntos.
- b) Asíntota vertical: 0.25 puntos. Asíntota horizontal: 0.25 puntos. Intervalos de decrecimiento: 0.25 puntos
- c) Obtención de la primitiva: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25). Aplicación regla de Barrow: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

### Ejercicio 3.

- a) Obtener el punto medio de  $A$  y  $B$ : 0.25 puntos. Hallar el punto  $Q$ : 0.5 puntos. Calcular el área del triángulo: 0.75 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

### Ejercicio 4.

- a) Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos.
- b) Calcular la probabilidad de que la temperatura sea mayor de  $36^\circ$ : 0.75 puntos. Obtener el número esperado de días: 0.25 puntos.
- c) Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.5 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

**MATEMÁTICAS II - SOLUCIONES**  
**(Documento de trabajo Orientativo)**  
**OPCIÓN A**

**Ejercicio 1**

a) Para 2000 litros de aire, según los porcentajes indicados, se precisan: 1560 litros de nitrógeno, 420 de oxígeno y 20 litros de argón.

b) Se tomarán  $x$  litros de mezcla A,  $y$  litros de mezcla B y  $z$  litros de mezcla C.

De acuerdo con los datos  $(x, y, z)$  debe satisfacer el sistema 
$$\begin{cases} 0.8x + 0.7y + 0.6z = 1560 \\ 0.2x + 0.2y + 0.4z = 420, \\ 0.1y = 20 \end{cases}$$
 cuya solución es

$(x = 1700, y = 200, z = 100)$ .

Es decir son necesarios 1700 litros de mezcla A, 200 litros de mezcla B y 100 litros de mezcla C.

**Ejercicio 2**

a) La abscisa  $x$  del punto buscado debe verificar que  $f'(x) = 3/e$ .

$$f'(x) = 3e^{3x-2} = \frac{3}{e} \Leftrightarrow e^{3x-2} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow 3x - 2 = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1/3}.$$

Para  $x = 1/3$  se tiene  $y = e^{3 \cdot 1/3 - 2} = e^{-1}$  y en consecuencia, el punto pedido es  $(1/3, e^{-1})$ .

La recta tangente tiene por ecuación  $y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \left( x - \frac{1}{3} \right)$ .

b) Usando la regla de L'Hôpital se tiene  $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - e^{3x-2}}{6x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -1/2$ .

c) La abscisa del punto de corte entre la recta  $y = 1$  y la curva  $y = f(x)$  es  $x = 2/3$ . Como en  $x = 0$  se tiene que

$$f(0) = e^{-2} < 1, \text{ el área pedida viene dada por } A = \int_0^{2/3} (1 - e^{3x-2}) dx = \left[ x - \frac{1}{3}e^{3x-2} \right]_0^{2/3} = \boxed{\frac{1}{3}(1 + e^{-2})}.$$

**Ejercicio 3**

a) El sistema  $\begin{cases} z - 1 = 4 + 5z \\ 2 - 3z = 4z - 3 \end{cases}$  es incompatible, luego las rectas no se cortan.

Un vector director de  $r_1$  es  $\vec{u} = (1, -3, 1)$  y un vector director de  $r_2$  es  $\vec{v} = (5, 4, 1)$ . Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son linealmente independientes, luego las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia entre ellas obtenemos el plano  $\tau$  que contiene a  $r_1$  y es paralelo a  $r_2$ . Este plano está determinado por el punto  $P(-1, 2, 0) \in r_1$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Su ecuación implícita es  $-7x + 4y + 19z - 15 = 0$ . La distancia entre las rectas es la distancia del punto  $Q(4, -3, 0) \in r_2$  al plano  $\tau$ :

$$d(Q, \tau) = \frac{|-28 - 12 - 15|}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}}; \quad \boxed{d = \frac{55}{\sqrt{426}} \approx 2.665}.$$

b) Plano  $\pi$  que contiene a  $r_1$  y pasa por el origen:  $2x + y + z = 0$ . Punto  $B$  de intersección de  $\pi$  y  $r_2$ :

$$2(4 + 5\mu) + (-3 + 4\mu) + \mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{B \left( \frac{7}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{-1}{3} \right)}.$$

**Ejercicio 4**

a)  $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.90 = 0.10$ .

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(A) = 0.4.$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.55 - 0.4 + 0.10 = 0.25.$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = 0.25.$$

b) Como  $P(B|\overline{A}) = P(B)$ ,  $B$  es independiente de  $A$ . (También se puede argumentar que son independientes porque  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .)

## SOLUCIONES OPCIÓN B

### Ejercicio 1

a) La matriz  $A$  es equivalente, haciendo operaciones elementales de fila, a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Si } t \neq 0: \text{rg}(A) = 2 \text{ y si } t = 0: \text{rg}(A) = 1.}$$

b) Para que el sistema  $AX = B$  sea compatible determinado, debe ser  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ :

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 3t+3 \end{array} \right),$$

de donde se concluye que  $\boxed{t = -1}$ .

Sustituyendo  $t = -1$  se obtiene el sistema  $\begin{cases} x + y = 3 \\ -y = 3 \end{cases}$ , que tiene por solución  $\boxed{(x = 6, y = -3)}$ .

### Ejercicio 2

a) La recta tangente es  $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$ . Como  $f(2) = 1$ ,  $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{3}$ , la tangente es  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ , que corta al eje  $OX$  en  $P(5, 0)$  y al eje  $OY$  en  $Q(0, 5/3)$ . El área del triángulo es  $\boxed{A = \frac{25}{6}}$ .

b) El dominio de  $f$  es  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$ . Por tanto la curva  $y = f(x)$  tiene una  $\boxed{\text{asíntota vertical: } x = -1}$ . Por otra parte  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , luego hay una  $\boxed{\text{asíntota horizontal: } y = 0}$ .

Para estudiar el crecimiento vemos que  $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$ , por tanto que  $f$  es decreciente en cada uno de los intervalos en que está definida, es decir  $\boxed{f \text{ es decreciente en } (-\infty, -1) \text{ y en } (-1, \infty)}$ .

c)  $\int_0^2 xf(x) dx = 3 \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = 3 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = [3(x - \ln(x+1))]_0^2 = \boxed{6 - 3 \ln 3}$

### Ejercicio 3

a) Calculamos los vértices del triángulo: El punto medio de  $A$  y  $B$  es  $P(2, 0, 1)$ . La recta que pasa por  $A$  y  $B$  tiene ecuación implícita  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - z = 5 \end{cases}$  y corta al plano  $z = 7$  en el punto  $Q(4, -2, 7)$ .

$$\boxed{\text{El área del triángulo es } \frac{1}{2} \|\vec{OP} \times \vec{OQ}\| = \frac{1}{2} \|(2, -10, -4)\| = \sqrt{30}}.$$

b) Un vector normal al plano pedido es  $(3, 5, 0)$  (vector director de  $r$ ), por lo que la ecuación implícita del plano es de la forma  $3x + 5y + 0z = d$ . Para que pase por el punto  $A$  debe ser  $d = 8$  y queda  $\boxed{3x + 5y = 8}$ .

c) Un vector director de  $r$  es  $\vec{v}_1 = (3, 5, 0)$  y un vector director de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  es  $\vec{v}_2 = (1, -1, 3)$ .

El coseno del ángulo formado por estos dos vectores es  $\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{374}} \approx 0.1034$ .

### Ejercicio 4

Sea  $X \sim N(30, 5)$  la variable aleatoria "temperatura máxima" y  $Z = \frac{x - 30}{5}$  la variable normalizada asociada.

a)  $P(28 < X < 32) = P(-0.4 < Z < 0.4) = 2P(Z < 0.4) - 1 = 0.3108$ .

b)  $P(X > 36) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = 0.1151$ . El número esperado de días es  $30 \cdot 0.1151 \approx 3.45$ .  
 $\boxed{\text{Cabe esperar que entre 3 y 4 días del mes se superen los } 36^\circ}$ .

c) Se trata de hallar  $a$  tal que  $P(X > a) = 0.5$  y esto es justamente el valor medio de la variable. Luego  $\boxed{\text{el día 10 de junio se alcanzaron } 30^\circ}$ .

# DOCUMENTO DE ORIENTACIONES PARA LA EVAU

## Matemáticas II. Curso 2019/2020

### ESTRUCTURA DEL EXAMEN

El examen constará de **cuatro problemas igualmente ponderados**, cada uno de ellos relativo a uno de los cuatro bloques con contenido específico del currículo oficial de MATEMÁTICAS II, 2º Bachillerato: ÁLGEBRA, ANÁLISIS, GEOMETRÍA y PROBABILIDAD.

### CONTENIDOS

Las pruebas se elaborarán teniendo en cuenta el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, y Orden PCI/12/2019, de 14 de enero, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, y las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas en el curso 2018-2019).

Se podrá pedir en las mismas la realización de tareas similares a las siguientes:

#### ÁLGEBRA

- Usar matrices como herramienta para representar datos estructurados y sistemas de ecuaciones lineales.
- Realizar operaciones con matrices y aplicar propiedades.
- Calcular determinantes de orden menor o igual que 4 y manejar las propiedades elementales.
- Calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Usar adecuadamente las propiedades de la matriz inversa.
- Calcular el rango de una matriz de orden no superior a 4, por determinantes o por el método de Gauss. Estudiar el rango de una matriz que dependa como máximo de un parámetro.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales. Discutir las soluciones de un sistema lineal, dependiente de un parámetro.
- Plantear y resolver problemas que simulen situaciones de la vida real, cuya solución pueda obtenerse a partir de un sistema lineal de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

#### ANÁLISIS

- Calcular el límite de una función en un punto y en el infinito. Calcular límites laterales y resolver indeterminaciones sencillas.
- Interpretar el significado de la continuidad y la discontinuidad. Identificar funciones continuas y tipos de discontinuidad. Manejar operaciones algebraicas con funciones continuas y composición de funciones continuas.
- Usar el teorema de Bolzano para localizar soluciones de una ecuación.
- Manejar y saber interpretar el concepto de derivada de una función en un punto. Manejar las propiedades de la derivación y calcular derivadas.



- Usar derivadas para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento y valores extremos. Plantear y resolver de problemas de optimización.
- Conocer y aplicar los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L'Hôpital.
- Calcular primitivas inmediatas y de funciones que sean derivadas de una función compuesta. Integrar por partes y mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integrar funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
- Calcular áreas de recintos limitados por rectas o curvas sencillas.

## **GEOMETRÍA**

- Operar con vectores del espacio tridimensional. Estudiar la dependencia e independencia lineal. Manejar los conceptos de base y coordenadas.
- Manejar el producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica; vectores unitarios, ortogonales y ortonormales.
- Calcular el ángulo entre dos vectores.
- Manejar el producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Manejar el producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Aplicar los distintos productos al cálculo de áreas y volúmenes.
- Obtener ecuaciones de rectas en el espacio, en cualquiera de sus formas. Obtener ecuaciones de planos. Estudiar la posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio.
- Resolver problemas de geometría afín con rectas y planos.
- Calcular distancias entre puntos rectas y planos, así como ángulos entre dos planos, entre dos rectas que se corten y entre una recta y un plano.

## **PROBABILIDAD**

- Calcular la probabilidad de sucesos aleatorios, mediante la regla de Laplace o las fórmulas de la axiomática de Kolmogorov.
- Calcular probabilidades condicionadas. Usar el teorema de probabilidad total y la fórmula de Bayes.
- Identificar variables aleatorias discretas. Calcular probabilidades de sucesos asociados a una distribución binomial. Calcular la media y la desviación típica de una variable aleatoria con distribución binomial.
- Calcular probabilidades de sucesos que se puedan modelizar mediante una distribución binomial, a partir de su aproximación por la normal.
- Calcular probabilidades de sucesos que pueden modelizarse mediante una distribución normal.