uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**F**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

   a) Determine todos los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.
   b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2}.$$

   a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   b) Para $a = 1$, calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ k & si \quad 0 < x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.
   b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}.$$

   a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
   b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abcisa $x = 1$.

5. (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, P1 y P2. Cada kg de P1 contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso P1 le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso P2 de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

6. (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x \ - 2y \ + \ (a+1)z & = & 1 \\ 2x \ - a\,z & = & 2 \\ (a+2)x \ - ay & = & 4 \end{array} \right.$$

   a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
   b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

8. (2 puntos) El $80\,\%$ de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el $35\,\%$ de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el $70\,\%$ de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:
   a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
   b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

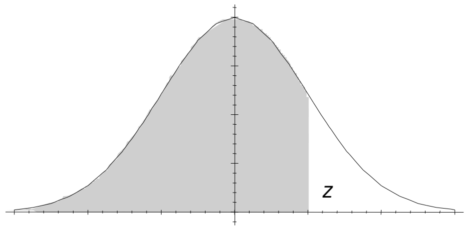
9. (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.
   a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del $95\,\%$.
   b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\bar{X}$, sea menor de $30{,}5$ minutos.

10. (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el $20\,\%$ de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del $5\,\%$ de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del $50\,\%$ de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un $45\,\%$ de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son $50\,\%$, $40\,\%$ y $10\,\%$, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:
    a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.
    b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	**,00**	**,01**	**,02**	**,03**	**,04**	**,05**	**,06**	**,07**	**,08**	**,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo de la expresión de la matriz A^2 .... 0,50 puntos.

Obtención de los valores de los parámetros .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Obtención de la matriz B^2 .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la matriz B^{10} .... 0,75 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo de la derivada .... 0,50 puntos.

Obtención del valor del parámetro a .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Identificación de la indeterminación .... 0,25 puntos.

Planteamiento y cálculo correcto del límite de la función .... 0,75 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Referencia a la continuidad en cada tramo .... 0,25 puntos.

Estudio de la continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$.................................... 0,50 puntos.

Conclusión final sobre la continuidad solicitada .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Justificación de que la función no corta al eje OX .... 0,25 puntos.

Planteamiento correcto del área pedida .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la superficie .... 0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo del dominio de definición... 0,25 puntos.

Cálculo, justificado, de los intervalos de crecimiento y decrecimiento . 0,75 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Cálculo de la pendiente de la recta y de la ordenada del punto .... 0,50 puntos.

Obtención de la ecuación de la recta tangente....................................... 0,25 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determinación de las variables y de la función objetivo........................ 0,25 puntos.

Determinación correcta de las restricciones .... 0,50 puntos.

Representación de la región factible.. 0,50 puntos.

Cálculo correcto de los vértices de la región factible .... 0,50 puntos.

Solución correcta contextualizada (cantidad de pienso y beneficio) ..... 0,25 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Descripción correcta de las tres incógnitas... 0,25 puntos.
Planteamiento del sistema de ecuaciones .... 0,75 puntos.
Resolución correcta del sistema .... 0,75 puntos.
Obtención de los porcentajes pedidos .... 0,25 puntos.

Ejercicio 7. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos.. 0,25 puntos.
Discusión correcta del sistema .... 0,75 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Obtención de la solución del sistema .... 1 punto.

Ejercicio 8. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Ejercicio 9. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto del valor crítico $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Planteamiento con la aplicación de la fórmula del error .... 0,25 puntos.
Determinación correcta del tamaño mínimo de la muestra .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Determinación de la distribución de la media muestral .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida .... 0,50 puntos.

Ejercicio 10. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

SOLUCIONES

1. *a*)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & -4+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2=4, b^2=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2, b=-2 \\ a=-2, b=2 \end{cases}$$

b)

$$B^2=(A+I)^2=2A+I, \quad B^3=(A+I)(2A+I)=3A+I, \qquad B^4=(2A+I)^2=4A+I \Longrightarrow B^{10}=10A+I$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad B^{10} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$$

2. *a*)

$$f'(x) = a + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$f'(1) = a + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow a = 1$$

b) Para $a=1$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) = -\infty \ +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)}{x-\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-\sqrt{x^2+2}} = 0$$

3. *a*) Las funciones $f_1(x)=e^x$, $\quad f_2(x)=k$ y $f_3(x)=-2x^2+x+6$ son continuas $\forall x\in\mathbb{R}$ puesto que se trata de una función exponencial, una constante y una función polinómica, respectivamente. Por tanto, basta analizar la continuidad de $f(x)$ en $x=0$ y en $x=2$.

- Estudio de la continuidad en $x=0$
  $\exists f(0)=e^0=1$

  $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^x = e^0 = 1$
  $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} k = k$
  Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, es necesario que $k=1$.

- Estudio de la continuidad en $x=2$
  $\exists f(2)=0$

  $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} k = k$
  $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} (-2x^2+x+6) = 0$
  Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, es necesario que $k=0$

Entonces $\nexists k\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Como la exponencial no corta el eje OX, para $k=1$, el área pedida es:

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \int_0^1 1\,dx = e^x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_0^1 = 2-\frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e}\ u^2$$

4. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

Como $(x^2+3)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entones se tiene que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ y $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Por tanto, $f(x)$ crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica en x_0 es

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = \frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

En $x_0 = 1$

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = -1$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

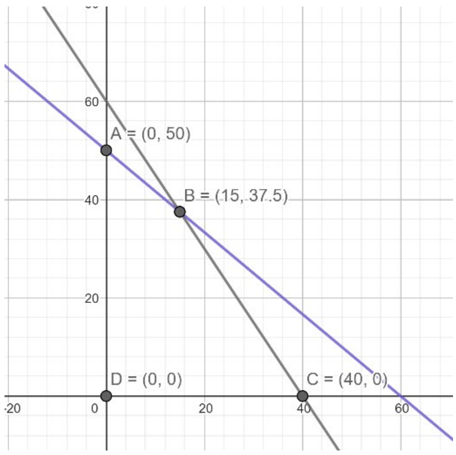
Así, la recta tangente a la gráfica en $(x_0, y_0) = (1, -1)$ es

$$y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

5. Sea $x =$ kg de pienso P1 fabricados, e $y =$ kg de pienso P2 fabricados. Entonces:

$$S = \{0{,}5x + 0{,}6y \leq 30;\ 0{,}3x + 0{,}2y \leq 12;\ x \geq 0;\ y \geq 0\},$$

con vértices $A = (0, 50)$, $B = (15; 37{,}5)$, $C = (40, 0)$, $D = (0, 0)$.



La función beneficio es $B(x, y) = x + 2y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(0, 50) = 100 \rightarrow$ Máximo
- $B(15; 37{,}50) = 90$
- $B(40, 0) = 40$
- $B(0, 0) = 0$

Debe fabricar 50 kg de P2 y nada de P1 para maximixar beneficios. El beneficio obtenido será de 100 euros.

6. Sean $x =$ Número de novelas, $y =$ Número de biografías y $z =$Número de libros de autoayuda.

$$\begin{cases} x + y + z & = & 90 \\ -x + 2z & = & 0 \\ x - y & = & 5 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+2f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & 3 & 90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array}\right)$$

Se obtiene entonces que $z = 19$, $y = 33$ y $x = 38$. Por tanto, se prestan un $38\,\%$ de novelas, un $36\,\%$ de biografías y un $19\,\%$ de libros de autoayuda.

7. *a*) $|A| = -a^2 + 2a = 0 \Longleftrightarrow a = 0,\ a = 2$

Si $a \neq 2, 0 \Longrightarrow Rg(A) = Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
Si $a = 0$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow Rg(A) = 2 \neq Rg(A|B) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $a = 2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-4f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow Rg(A) = 2 = Rg(A|B) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow y = 1,\ z = -4, \quad x = 3$$

8. Sea $A =$'La prenda ha sido fabricada en Asia' e $I =$'La prenda se ha fabricado usando mano de obra infantil'. Sabemos que $P(A) = 0{,}8$, $P(I) = 0{,}35$ y $P(A \cup I) = 0{,}7$.

a) Por definición $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I)$, entonces

$$P(A \cap I) = P(A) + P(I) - P(A \cup I) = 0{,}8 + 0{,}35 - 0{,}7 = 0{,}45.$$

b) Sea $\bar{A}$ el suceso complementario de A e $\bar{I}$ el suceso complementario de I. La probabilidad pedida es:

$$P(\bar{A} \mid \bar{I}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})}.$$

Calculamos

$$P(\bar{A} \cap \bar{I}) = P(\overline{A \cup I}) = 1 - P(A \cup I) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

Por lo tanto,

$$P(\bar{A} \mid \bar{I}) = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}35} = 0{,}4615.$$

9. *a*) Se tiene $E < 1, \sigma = 3$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 > 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > 34{,}5744.$$

   Luego el tamaño mínimo de la muestra debe ser de $n = 35$ clientes.

   b) La variable aleatoria $\bar{X}$ sigue una distribución $N(32, 3/\sqrt{16})$

$$P(\bar{X} < 30{,}5) = P\left(Z < \frac{30{,}5 - 32}{3/\sqrt{16}}\right) = P(Z < -2) = 0{,}0228.$$

10. Definimos los sucesos: $D =$ 'País desarrollado', $E_1 =$ 'El país tiene una esperanza de vida inferior a 70 años', $E_2 =$ 'El país tiene una esperanza de vida de 70 a 75 años' y $E_3 =$ 'El país tiene una esperanza de vida mayor de 75 años'.

   a) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1 \mid D)P(D) + P(E_1 \mid \bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}41. \end{aligned}$$

   b) La probabilidad pedida es:

$$P(\bar{D} \mid E_1) = \frac{P(E_1 \mid \bar{D})P(\bar{D})}{P(E_1)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}41} = 0{,}9756.$$