Espacio Euclídeo

1.- Norma de un vector

Definiremos el *espacio euclídeo* R^3 por medio de las coordenadas cartesianas y ciertos conceptos geométricos, de forma que utilizando herramientas algebraicas y analíticas obtendremos resultados geométricos.

Identificamos cada punto o elemento (x_1, x_2, x_3) del espacio euclídeo R^3 con el vector $\vec{x}$ que va desde el origen a dicho punto: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Además, con el objetivo de fijar todos los conceptos necesarios introducimos la siguiente definición.

Definición 1 *Se define la* base canónica *en* R^3 *como el conjunto de vectores:*

$$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\},$$

de manera que un vector cualquiera de R^3 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$*, se puede representar en términos de la base canónica*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i.$$

En ocasiones la base canónica en el espacio de denota como

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

Ejercicio 1 Hallar un vector de R^3 cuyas coordenadas con respecto de la base $B = \{(-1, 2, 0), (0, 0, 3), (0, -2, 1)\}$ son

a) $(1, 2, 3)$;

b) $(-1, 5, 0)$:

Definición 2 *(Espacio Euclídeo) El* **espacio euclídeo** *es un espacio vectorial normado, es decir, un espacio vectorial con una norma asociada. De esta forma, el espacio euclídeo 3-dimensional se denota como* R^3*, y tiene asociada una función que denominamos* **norma**

$$\|\cdot\| : R^3 \to R,$$

tal que para todo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ *tenemos que*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

y que cumple las siguientes propiedades:

1) *Para todo* $\vec{x} \in R^3$*,* $\|\vec{x}\| > 0$ *si* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *y* $\|\vec{x}\| = 0$ *si* $\vec{x} = \vec{0}$ *(*$\vec{0}$ *vectorial);*

2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$ *para todo* $\lambda \in R$ *y* $\vec{x} \in R^3$*;*

3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *para todo* $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$.

Observación 1 *Asociada a toda norma existe una función* **distancia** *entre dos elementos del espacio euclídeo* $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$*, que denotamos como la norma de la diferencia*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| .$$

Además, la función distancia cumple las propiedades de la norma. Para todo $x, y \in R^3$*:*

1) $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| > 0$ *si* $\vec{x} \neq \vec{y}$*;* $d(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}\| = 0$*;*

2) $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(-1)(\vec{y} - \vec{x})\| = |-1| \, \|\vec{y} - \vec{x}\| = d(\vec{y}, \vec{x})$*;*

3) $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{z} + \vec{z} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Interpretación geométrica de la norma de un vector.

Suponemos el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Como hemos comentado con anterioridad este vector representa el segmento desde el origen de coordenadas hasta un cierto punto del espacio P. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ORP, donde R es la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el plano XY, tendremos que

$$\|\overline{OP}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 = \overline{OR}^2 + a_z^2.$$

Si aplicamos de nuevo el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo OQR, donde R es el punto sobre el eje X con distancia a_x al origen, tendremos que

$$\|\overline{OR}\|^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

de forma que combinando ambas expresiones tendremos

$$\|\vec{a}\|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

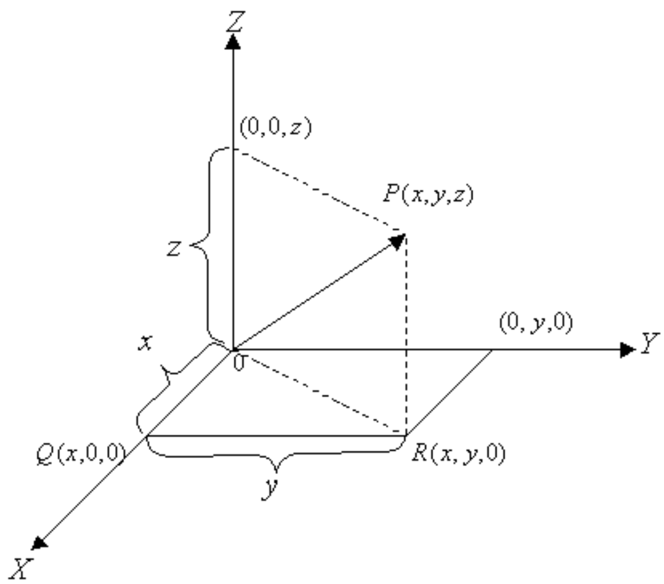

Figura 1: Norma de un vector.

2.- Producto escalar

Definición 3 *(Producto escalar) Definimos el* **producto escalar** *en* R^3 *como la aplicación* $\langle \cdot, \cdot \rangle : R^3 \times R^3 \to R$*, tal que:*

1) Definida positiva, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ *si* $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ *si* $\vec{x} = \vec{0}$*;*

2) Simétrica, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$*;*

3) Bilineal, $\langle l\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{z} \rangle = l \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$, $l, \mu \in R$.

De esta forma, el producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva, que denotaremos como

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Observación 2 *A todo producto escalar le podemos asociar una norma,*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle},$$

definiendo de esta manera la longitud de un vector $\vec{x}$.

Interpretación geométrica del producto escalar.

El producto escalar entre dos vectores del espacio se puede expresar como

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\alpha),$$

siendo α el ángulo que forman ambos vectores en el espacio euclídeo R^2. Si representamos dos vectores $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ del espacio euclídeo (en el plano en este caso), en un sistema de referencia cartesiano rectangular. Teniendo en cuenta la definición de norma de un vector tendremos que las normas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vienen representadas por las siguientes expresiones $\|\vec{a}\|$ y $||\vec{b}||$, respectivamente, por aplicación del Teorema de Pitágoras. Además, por una interpretación geométrica de los vectores en el plano llegamos a que

$$\begin{array}{ll} a_x = \|\vec{a}\| \cos \alpha, & a_y = \|\vec{a}\| \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \\ b_x = ||\vec{b}|| \cos \beta, & b_y = ||\vec{b}|| \operatorname{sen} \beta \end{array}$$

donde α y β representan los ángulos que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman con el eje de coordenadas X. Entonces, haciendo uso de la definición del producto escalar tenemos que

$$\begin{aligned} < \vec{a}, \vec{b} > &= \|\vec{a}\| \cos \alpha ||\vec{b}|| \cos \beta + \|\vec{a}\| \operatorname{sen} \alpha ||\vec{b}|| \operatorname{sen} \beta \\ &= \|\vec{a}\| \, ||\vec{b}|| \big(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \big) \\ &= \|\vec{a}\| \, ||\vec{b}|| \cos(\beta - \alpha) = \|\vec{a}\| \, ||\vec{b}|| \cos \varphi, \end{aligned}$$

donde φ representa el ángulo hay entre ambos vectores.

Observación 3

- *La expresión geométrica del producto escalar nos permite calcular el ángulo que forman dos vectores cualesquiera del espacio,*

$$\cos(\alpha) = \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|};$$

- *Dos vectores* $\vec{x}, \vec{y}$ *son ortogonales* ($\vec{x} \perp \vec{y}$) *si y sólo si* $< \vec{x}, \vec{y} >= 0$*;*
- *Dos vectores* $\vec{x}, \vec{y}$ *son paralelos cuando*

$$\|\vec{x} \cdot \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|.$$

Ejemplo 2 Dados los vectores $\vec{a} = (0, 1, \sqrt{3})$ y $\vec{b} = (0, -1, 0)$, el ángulo que forman viene dado por la expresión

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\alpha).$$

Si calculamos el producto escalar de ambos vectores

$$< \vec{a}, \vec{b} >= 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot 0 = -1,$$

además,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{1^2} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}, \quad \text{y entonces} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Ejemplo 3 Dados los puntos $A = (1,0,2)$ y $B = (-1,3,0)$, calcular el punto situado sobre la dirección de la recta formada por ambos puntos y con módulo 2.

La dirección de la recta que pasa por los puntos A y B serán los vectores

$$\vec{b} = \tau\vec{AB} = \tau(-1-1,3,,-2) = \tau(-2,3,-2).$$

SI además $||\vec{b}|| = 2$

$$||\vec{b}|| = \sqrt{4\tau^2 + 9\tau^2 + 4\tau^2} = |\tau|\sqrt{17} = 2 \Rightarrow \tau = \pm\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Ejercicio 4 Dados los vectores $\vec{a} = (-1,-1,2)$ y $\vec{b} = (0,2,1)$, calcular un vector que sea ortogonal a ambos y cuyo módulo sea 2.

3.- Producto vectorial

Definición 4 *Tomando dos vectores $\vec{x},\vec{y}$ de R^3 el* **producto vectorial** *entre ambos vectores viene determinado por la expresión*

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k},$$

Interpretación geométrica del producto vectorial.

la norma del vector resultante del producto vectorial entre los vectores $\vec{x},\vec{y}$ viene determinada por

$$\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|\mathrm{sen}(\alpha),$$

que corresponde al área del paralelogramo formado por ambos vectores, y su dirección perpendicular a cada uno de ellos en el sentido del avance del tornillo o sacacorchos cuando va de $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Ejercicio 5 Dados los vectores $\vec{a} = (1,0,-1)$ y $\vec{b} = (2,-1,1)$, calcular los productos vectoriales de $\vec{a}\times\vec{b}$ y $\vec{b}\times\vec{a}$.

Pablo Álvarez Caudevilla, Cristina Brändle Cerquiera
Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería
Universidad Carlos III de Madrid