Polinomios

1.- Funciones polinomiales

Definición 1 (Función polinomial)
Sea n un entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_2, a_1, a_0 números reales con $a_n \neq 0$. La función

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se denomina *función polinomial o ecuación algebraica en x de grado n.*

Ejemplo 1 Las siguientes funciones son funciones polinomiales:

1. $f(x) = 3x^5 + x^3 - 0.2x^2 + 2x - 53$, grado 5.
2. $f(x) = (x-2)(x+3)$, grado 2.
3. $f(x) = 2$, grado 0.
4. $f(x) = x^3$, grado 3.

Teorema 1 *(Teorema Fundamental del Álgebra) Todo polinomio con coeficientes números complejos tiene tantas raíces complejas como su grado.*

Observamos que si tenemos una raíz x_1 podremos escribir la función polinómica de grado n como

$$(x - x_1)(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1) = 0.$$

Puesto que el polinomio

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1 = 0,$$

tiene al menos otra raíz repitiendo este proceso n veces este proceso obtendremos

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0.$$

Ejemplo 2 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Entonces,

$$a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\left\{\begin{array}{l} -a(x_1 + x_2) = b, \\ a x_1 x_2 = c, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{array}\right.$$

Ejemplo 3 Fórmula de Cardano–Vieta. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Entonces,

$$a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right] = ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - a x_1x_2x_3 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\left\{\begin{array}{l} -a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c, \\ -a x_1x_2x_3 = d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a} \end{array}\right.$$

Ejemplo 4 Para la ecuación $x^3 - 15x^2 + mx + 105 = 0$, hallar m sabiendo que sus raíces son 3 números en progresión aritmética.

Puesto que las raíces son tres números en progresión aritmética tendremos que

$$\alpha - r, \quad \alpha, \quad \alpha + r \qquad \text{o} \qquad \alpha, \quad \alpha + r, \quad \alpha + 2r.$$

Entonces, puesto que

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 3\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 5.$$

Ahora, como $\alpha = 5$ es una raíz

$$5^3 + 15 \cdot 25 + 5m - 105 = 0 \Rightarrow m = 71.$$

Además, como

$$(5 - r)5(5 + r) = 105 \Rightarrow r = \pm 2.$$

Observación 1 *La multiplicidad de las raíces o ceros podría ser mayor que uno. Esto quiere decir que si para la ecuación $f(x) = 0$ tenemos que $x = a$ es una raíz con multiplicidad r, operando de forma similar a como hicimos anteriormente tendremos que*

$$f(x) = (x - a)^r \varphi(x) = 0.$$

Ejemplo 5

$$f(x) = (x - 2)^3 (x + 1)^5 (x - 3)2(x - 4).$$

Finalmente, si un polinomio tiene por raíz el número complejo $a + bi$ diremos que $a - bi$ también es una raíz para esa función.

2.- Funciones cuadráticas

Definición 2 (Función cuadrática)
Sean a, b, c números reales con $a \neq 0$. La función dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

se llama *función cuadrática.*

Una función cuadrática es un polinomio de grado 2. Su gráfica es una parábola.

Todas las parábolas son simétricas respecto a una recta, el *eje de simetría*. El punto donde el eje interseca la parábola es el *vértice*.

Ejercicio 6 Trazar, dando diferentes valores a x, la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 3.$$

¿En qué se diferencian las dos parábolas?

Ejercicio 7 Trazar, dando diferentes valores a x, la gráfica de

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^2 + 3 \quad \text{y} \quad h(x) = x^2 - 2.$$

¿En qué se diferencian estas parábolas?

Ejercicio 8 Trazar, dando diferentes valores a x, la gráfica de

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = (x + 3)^2 \quad \text{y} \quad h(x) = (x - 2)^2.$$

¿En qué se diferencian estas parábolas?

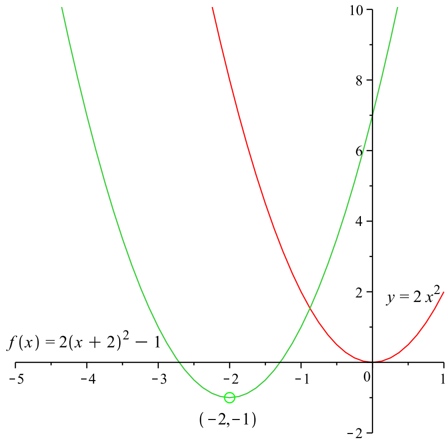
La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede reescribir de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Esta forma alternativa, denominada *forma estándar*, es conveniente a la hora de trazar la gráfica de la parábola, ya que el punto (h, k) corresponde al vértice. Si $a > 0$ la parábola está "abierta hacia arriba", mientras que si $a < 0$ la parábola está "abierta hacia abajo".

Ejemplo 9 Trazar la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$ utilizando para ello la forma estándar.

Para hallar la forma estándar de f tenemos que utilizar la técnica de completar cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 4x) + 7 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7 \\ &= 2((x+2)^2 - 4) + 7 \\ &= 2(x+2)^2 - 8 + 7 \\ &= 2(x+2)^2 - 1. \end{aligned}$$

A partir de esta forma $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$ se deduce que f representa una parábola abierta hacia arriba, $a = 2 > 0$, con vértice en el punto $(h, k) = (-2, -1)$.



Ejemplo 10 Escribir en forma estándar la ecuación de la parábola que tiene vértice $(1, 4)$ y pasa por el punto $(0, 0)$.

La ecuación de una parábola en forma estándar es $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Por tanto tenemos que determinar el valor de los parámetros a, h y k. El vértice de la parábola es $(h, k) = (1, 4)$; obtenemos

$$f(x) = a(x-1)^2 + 4.$$

Para determinar el valor de a usamos que la parábola pasa por el punto $(0, 0)$:

$$0 = a(0-1)^2 + 4 \qquad \Rightarrow a = -4,$$

lo que implica que la parábola se escribe

$$f(x) = -4(x-1)^2 + 4.$$

Ejercicio 11 Escribir en forma estándar la parábola $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Identificar el vértice y las intersecciones con el eje x.

Ejercicio 12 Demostrar que el vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encuentra en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$

Ejercicio 13 Máximos y mínimos de la función $f(x) = x^2 - 8x + 15$.

3.- División de polinomios

La división de polinomios es especialmente útil para factorizar y determinar ceros de funciones polinomiales. La función polinomial

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

tiene un cero en $x = 1$. Eso significa que $p(1) = 0$ y por tanto p se tiene que poder *factorizar* como

$$p(x) = (x-1)q(x),$$

donde $q(x)$ es un polinomio de grado 2. Para calcular q tenemos que usar el algoritmo de la división:

Dividimos x^3-3x^2+3x-1 entre $x-1$:

$$\begin{array}{lll}
 & x^3-3x^2+3x-1 & \underline{|x-1\quad} \\
\texttt{restar} & \underline{x^3-x^2} & x^2-2x+1 \\
 & \quad -2x^2+3x-1 & \\
\texttt{restar} & \quad \underline{-2x^2+2x} & \\
 & \qquad\qquad x-1 & \\
\texttt{restar} & \qquad\qquad \underline{x-1} & \\
 & \qquad\qquad 0 & \text{Resto de la división}
\end{array}$$

Concluimos que

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)(x^2-2x+1).$$

En el ejemplo anterior, el resto de la división es 0, pero esto no tiene que ser siempre así. Por ejemplo si dividimos x^3-3x^2+3x-1 entre $x+1$:

$$\begin{array}{lll}
 & x^3-3x^2+3x-1 & \underline{|x+1\quad} \\
\texttt{restar} & \underline{x^3+x^2} & x^2-4x+7 \\
 & \quad -4x^2+3x-1 & \\
\texttt{restar} & \quad \underline{-4x^2-4x} & \\
 & \qquad\qquad 7x-1 & \\
\texttt{restar} & \qquad\qquad \underline{7x+7} & \\
 & \qquad\qquad -8 & \text{Resto de la división}
\end{array}$$

Esto implica que

$$x^3-3x^2+3x-1=(x+1)(x^2-4x+7)-8.$$

Algoritmo de la división. Si p y d son dos polinomios tales que $d\neq 0$ y el grado de d es menor o igual que el grado de p, existen polinomios únicos q y r (cociente y resto) tales que

$$p(x)=d(x)q(x)+r(x),$$

con el grado de r menor o igual que el grado de d. Si $r=0$ entonces d divide a p en su dominio.

Ejercicio 14 Dividir x^3-1 entre $x-1$.

Ejercicio 15 Dividir $2x^4+4x^3-5x^2+3x-2$ entre x^2+2x-3.

Si el divisor d es un polinomio de grado 1, $x-a$, entonces el cociente, q, es un polinomio de un grado inferior a f y el resto, r, es un número. En tal caso la división se puede realizar de manera sintética en lo que se conoce como la *Regla de Ruffini.*

Ejemplo 16 Para dividir $3x^3-5x^2+2x-7$ entre $x-2$ disponemos los coeficientes en una tabla

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 2 & -7 \\
2 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}$$

Patrón vertical: sumar términos
Patrón diagonal: multiplicar por 2

Para comenzar el procedimiento, "bajamos"el 3.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 2 & -7 \\
2 & & & & \\
\hline
 & 3 & & &
\end{array}$$

Multiplicamos 3 por 2, el resultado, 6, lo escribimos debajo de -5 y sumamos ambos números. Este procedimiento se itera a lo largo de las columnas de la tabla:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 2 & -7 \\
2 & & 6 & & \\
\hline
 & 3 & 1 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 2 & -7 \\
2 & & 6 & 2 & \\
\hline
 & 3 & 1 & 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & 2 & -7 \\
2 & & 6 & 2 & 8 \\
\hline
 & 3 & 1 & 4 & |1
\end{array}$$

Obtenemos un polinomio de grado 2, cuyos coeficientes son 3, 1 y 4 y el residuo o resto de la división es 1:

$$3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = (x-2)(3x^2 + x + 4) + 1.$$

Una aplicación importante de la Regla de Ruffini se conoce por el *Teorema del Residuo*. Este teorema permite evaluar un polinomio en un punto sin necesidad de tener que calcular las diferentes potencias.

Teorema del residuo. El resto de la división de un polinomio por $x - a$ coincide con el valor numérico del polinomio en $x = a$; es decir

$$r = p(a).$$

Ejemplo 17 Evaluar $p(x) = 3x^3 + 8x^2 + 5x - 7$ en $x = -2$.

La primera opción consiste en calcular directamente $p(-2)$:

$$p(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 8 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 7 = -9.$$

Esta opción requiere más trabajo computacional que realizar la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 8 & 5 & -7 \\ -2 & & -6 & -4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & |-9 \end{array}$$

Otro resultado importante es el *Teorema del factor*. Si a es una raíz del polinomio p, entonces $p(a) = 0$. Por otro lado, por el resultado anterior, sabemos que $p(a)$ es el resto de la división de por $x - a$. Por tanto p tiene que ser divisible por $x - a$ (ya que el resto es 0)

Teorema del factor. Un polinomio p tiene un factor $(x - a)$ si y sólo si $p(a) = 0$.

Ejercicio 18 Demostrar que $(x - 2)$ y $(x + 3)$ son factores de $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 27x - 18$.

4.- Ceros de polinomios

Un polinomio de grado n puede tener como mucho n raíces reales (en los números complejos este enunciado se corresponde con el Teorema Fundamental del Álgebra). Por lo tanto, si el polinomio p de grado n tiene raíces reales $r_1, \ldots, r_m$, entonces se descompone de la forma

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_m)c_m(x),$$

donde c_m es un polinomio de grado $m \leq n$.

Ejemplo 19

1. El polinomio de primer grado $x - 2$ tiene exactamente una raíz, $x = 2$.
2. La función polinomial de segundo grado $x^2 - 6x + 9$ se factoriza como $(x - 3)(x - 3)$ y tiene dos ceros, $x = 3$ y $x = 3$.
3. La función polinomial del tercer grado $x^3 + 4x$ se factoriza como $x(x^2 + 4)$ y tiene un cero (real) $x = 0$.

El resultado de factorización para polinomios sólo afirma que existen raíces, pero no dice cómo calcularlas. No hay un método para determinar todas las raíces de todos los posibles polinomios, pero sí hay algún resultado que puede ayudar.

Teorema del factor/cero racional. Si el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces cada raíz racional de p es de la forma

$$r = \frac{q_1}{q_2}, \qquad \text{con } q_1 \text{ factor de } a_0 \text{ y } q_2 \text{ factor de } a_n$$

y q_1, q_2 no tienen factores comunes distintos de 1 (es decir r es irreducible).

Ejemplo 20 Determinar los ceros racionales de $p(x) = x^3 + x + 1$.

Los posibles ceros racionales son ± 1. Evaluando p en ± 1 se comprueba que ninguno de los dos es una raíz de p:

$$p(-1) = -1, \qquad p(1) = 3.$$

Luego p no tiene ceros racionales (de hecho tiene una única raíz real entre -1 y 0).

Ejemplo 21 Determinar los ceros racionales de $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Como $a_3 = 2$ y $a_0 = 3$ los posibles ceros racionales son

$$\frac{\text{Factores de } 3}{\text{Factores de } 2} = \frac{\pm 1, \pm 3}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}.$$

Mediante la Regla de Ruffini se puede determinar que $x = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & |\,0 \end{array}$$

Por tanto $p(x)$ se factoriza como

$$p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 3) = (x-1)(2x-1)(x+3) = 2(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+3)$$

y se puede concluir que las raíces están en $x = 1, \frac{1}{2}, -3$.

Ejercicio 22 Encontrar las soluciones reales de $-10x^3 + 15x^2 + 16x - 12 = 0$.

5.- Desigualdades no lineales

5.1. Desigualdades polinomiales

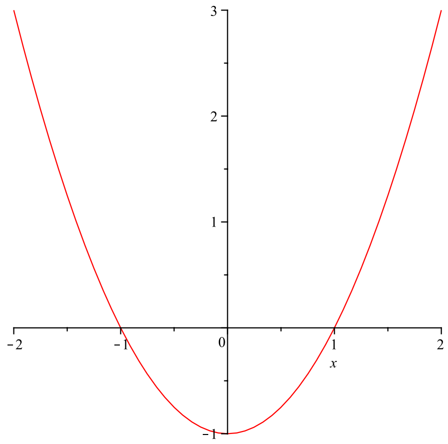
Para resolver una desigualdad polinomial, por ejemplo $x^2 - 1 < 0$, se parte del hecho de que un polinomio puede cambiar de signo sólo en sus raíces (pero no necesariamente). Los ceros del polinomio son los valores a tener en cuenta de la desigualdad y a partir de ellos se forman los intervalos de prueba para la desigualdad. Por ejemplo

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

tiene ceros en $x = -1, 1$. Estos ceros definen los intervalos de prueba

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, \infty).$$

Por tanto, para determinar los puntos en los que $x^2 - 1 < 0$ basta con evaluar $x^2 - 1$ en un único punto de cada intervalo de prueba, por ejemplo



$$\begin{aligned} x = -2: &\quad (-2)^2 - 1 > 0, \\ x = 0: &\quad 0^2 - 1 < 0, \\ x = 2: &\quad 2^2 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $x^2 - 1 < 0$ en $(-1, 1)$.

Ejemplo 23 Determinar el conjunto de puntos en el que $x^2 - 1 \geq 0$.

Sabemos que $x^2 - 1 = 0$ si $x = -1, 1$. Definimos los intervalos de prueba

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, \infty).$$

y evaluamos:

$$\begin{aligned} x = -2: &\quad (-2)^2 - 1 > 0, \\ x = 0: &\quad 0^2 - 1 < 0, \\ x = 2: &\quad 2^2 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Por tanto obtenemos como solución $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Ejercicio 24 Resolver $2x^3 - 3x^2 - 32x > -48$.

`Indicación: Una vez determinados los intervalos de prueba, estudiar los signos evaluando en la forma factorizada.`

5.2. Desigualdades racionales

Las funciones racionales, o fracciones algebraicas, son cocientes de polinomios. Para resolver una desigualdad de la forma

$$\frac{3x - 6}{x - 1} \leq 0,$$

tenemos que tener en cuenta además de los ceros del denominador y del numerador, los valores de x para los cuales el denominador se anula. En este caso, por ejemplo los intervalos de prueba son $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$:

	$x \in (-\infty, 1)$	$x = 1$	$x \in (1, 2)$	$x = 2$	$x \in (2, \infty)$
$3x - 6$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x-6}{x-1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Tenemos que

$$\frac{3x - 6}{x - 1} \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (1, 2].$$

Ejemplo 25 Analiza el conjunto $C := \{x : \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$. Observamos que $\frac{2x+1}{x+2} < 1$ es equivalente a

$$\frac{2x+1}{x+2} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{ó} \quad x + 2 > 0 \quad \text{y} \quad 2x + 1 < x + 2, \\ \text{ó} \quad x + 2 < 0 \quad \text{y} \quad 2x + 1 > x + 2. \end{cases} \Leftrightarrow \text{ó} \quad x > -2 \quad \text{y} \quad x < 1 \Rightarrow x \in (-2, 1).$$

Por lo tanto el sub-espacio C lo podemos escribir como

$$C = (-2, 1).$$

Ejercicio 26 Resolver la desigualdad

$$\frac{2x-7}{x-5} \leq 3.$$

5.3. Valor absoluto

Definición 3 *(Valor absoluto). Para cada número real a se define el* valor absoluto *de a como*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0, \\ -a & si \quad a < 0, \end{cases} \Leftrightarrow |a| = \text{máx}\{a, -a\}.$$

Ejemplo 27 Analiza el conjunto de números reales

$$A := \{x \, : \, |2x+3| < 6\}.$$

Similarmente a como hicimos con anterioridad,

$$|2x+3| < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ó} \quad 2x+3 < 6 \Rightarrow 2x-3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}, \\ \text{ó} \quad -2x-3 < 6 \Rightarrow -2x-9 < 0 \Rightarrow x > \frac{-9}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$A = \left(\frac{-9}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Ejercicio 28 Analiza el conjunto de números reales

$$B := \{x \, : \, |x-1| < |x|\}.$$

Pablo Álvarez Caudevilla, Cristina Brändle Cerquiera
Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería
Universidad Carlos III de Madrid