Funciones exponenciales y logarítmicas

1.- Funciones exponenciales y sus gráficas

Un terremoto de 8.5 grados en la escala de Richter es 100 veces más potente que uno de 6.5, ¿por qué?, ¿cómo es la escala de Richter?

Definición 1 (Función exponencial)
La función f es una *función exponencial de base* a si es de la forma

$$f(x) = a^x,$$

con $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.

¿Qué significa exactamente a^x si x no es racional? Sabemos que, por ejemplo,

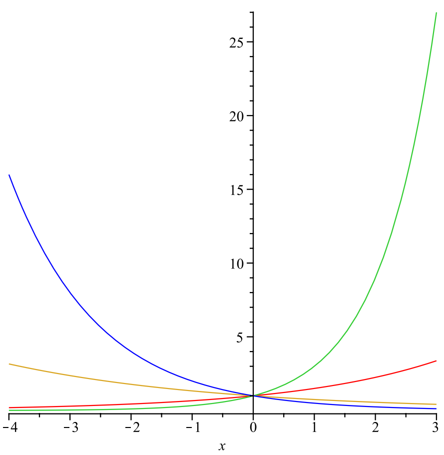
$$2^{3/2} = \sqrt{2^3}, \qquad 2^{p/q} = \sqrt[q]{2^p},$$

pero, ¿cómo se calcula $2^{\sqrt{3}}$? Aunque no es el objetivo de este curso, basta con saber que cualquier número real, por ejemplo $\sqrt{3}$ se puede aproximar tanto como queramos por una sucesión de números racionales. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccccc} 2^{1.732} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1.733} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2^{1.732050} & < & 2^{\sqrt{3}} & < & 2^{1.732051} \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

1.1. Propiedades

1. $a^x > 0 \quad$ para todo x,
2. $a^0 = 1$,
3. $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad$ para $a > 1$,
4. $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad$ para $0 < a < 1$,
5. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,
6. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
7. $(a^x)^y = a^{xy}$,
8. $a^x = a^y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$.



Ejercicio 1 Utilizando las propiedades 5 y 6 demostrar que

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

La propiedad 8 es especialmente útil para resolver ecuaciones que involucren exponenciales:

Ejemplo 2 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $2^x = 8$,
   Como $8 = 2^3$ se tiene que $x = 3$.
2. $4^{x-3} = 8$,
   La idea para resolver este tipo de ecuaciones es escribir todos los términos con la misma base, en este caso 2. Para ello se usan las propiedades de las funciones exponenciales,

$$4^{x-3} = (2^2)^{x-3} = 2^{2(x-3)} \quad \text{y} \quad 8 = 2^3,$$

   por tanto tenemos que resolver

$$2(x-3) = 3, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 3 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $27^{x+1} = \dfrac{1}{9}$,
2. $4^{x+2} = 8^x$,
3. $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$.

1.2. La base natural e

Hoy en día, la base 2 tiene mucha importancia en aplicaciones informáticas; sin embargo en muchas aplicaciones la opción más útil para base es el número irracional e:

Definición 2 (El número e)
El límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

existe y se designa por e. Al número e se le llama *base exponencial natural.*

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718280469
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	e

1.3. Aplicaciones

El interés compuesto

Supongamos que un capital P inicial se invierte a una tasa de interés compuesto anual i acumulable una vez al año. Si el interés se suma al capital al final del año, el balance nuevo, P_1 es

$$P_1 = P + Pi = P(1+i).$$

Al comienzo del segundo periodo se invierte un capital $P_1 = P(1+i)$ y al cabo de otro año el balance es

$$P_2 = P_1 + P_1 i = P_1(1+i) = P(1+i)^2.$$

De forma recurrente se obtiene el capital final transcurridos t años

$$P_t = P(1+i)^t.$$

Imaginemos ahora que consideramos incrementos de interés más frecuente, trimestral, por ejemplo. Sea a el número de periodos al año en el que se abonan los intereses (4, en el caso de trimestral), t el número de años. La tasa de incremento es i/a y el por tanto, el saldo en la cuenta después de t años es

$$A = P\left(1+\frac{i}{a}\right)^{at}. \tag{1}$$

Si a aumenta ilimitadamente el proceso conduce al *interés compuesto*. Si en la fórmula (1) denotamos $n = a/i$ obtenemos

$$\begin{aligned} A &= P\left(1+\frac{i}{a}\right)^{at} \\ &= P\left(1+\frac{i}{ni}\right)^{nit} \\ &= P\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nit} \\ &= P\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{it}. \end{aligned}$$

Si n aumenta indefinidamente (tomar el límite cuando n tiende a infinito). Se concluye que la fórmula del interés compuesto es

$$A = P\mathrm{e}^{it}.$$

Ejercicio 4 Invertimos 12000€ a una tasa de interés anual del 9 %. Calcular el saldo después de 5 años si el incremento es

1. trimestral
2. mensual
3. diario
4. continuo

2.- Funciones logarítmicas y sus gráficas

Definición 3 (Función logarítmica)
Decimos que y es el logaritmo en base a de x si

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y,$$

es decir, y es el número al que hay que elevar a para obtener x, donde $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$. La función dada por

$$f(x) = \log_a x$$

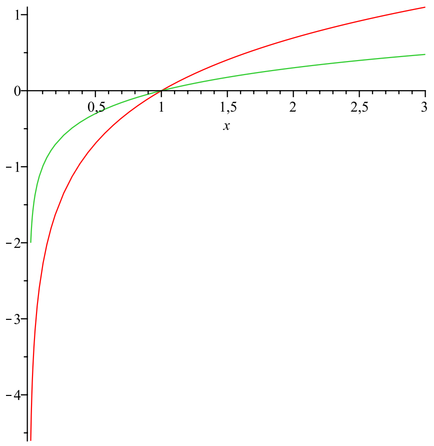
se denomina función logarítmica de base a.

Ejercicio 5 $2 = \log_4 16$ es equivalente a $4^2 = 16$

Al igual que sucede con las funciones exponenciales, hay una función "especial": el *logaritmo neperiano o natural.* Decimos que y es el logaritmo neperiano de x si

$$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x.$$

2.1. Propiedades con $a > 1$



1. $\log(1) = 0$,
2. $\log_b b = 1 \quad$ para todo b,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \log(x) = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$
4. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$,
5. $\log(a^x) = x\log(a)$,
6. $\log_a(a^x) = x$,
7. $\log_a x = \log_a y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$.

Ejercicio 6 A partir de las propiedades 4 y 5 demostrar que

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ejemplo 7 Escribir $\ln 6$ en términos de $\ln 2$ y $\ln 3$.

Como $6 = 2 \cdot 3$, utilizando la propiedad del producto para logaritmos, tenemos

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3.$$

Ejemplo 8 Escribir, en forma abreviada la expresión

$$\frac{1}{2}\ln x + 3\ln(x+1).$$

Utilizamos las propiedades de los logaritmos

$$\frac{1}{2}\ln x + 3\ln(x+1) = \ln x^{1/2} + \ln(x+1)^3 = \ln(x^{1/2}(x+1)^3).$$

Ejercicio 9 Desarrollar la expresión logarítmica

$$\ln\frac{\sqrt{3x-5}}{7}.$$

3.- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

A la hora de resolver ecuaciones que involucran exponenciales y logaritmos hay dos estrategias fundamentales

1. Propiedades una a una:

   $a^x = a^y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$,
   $\log_a x = \log_a y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y$.

2. Propiedades inversas:

   $a^{\log_a x} = x \qquad$ y $\qquad \log_a a^x = x$.

Ejemplo 10 Resolver la ecuación $\mathrm{e}^{-4x-4} = \mathrm{e}^{x^2}$.

Utilizando la propiedad uno a uno de las exponenciales tenemos que

$$-4x - 4 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 4x + 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+2)^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2.$$

Ejemplo 11 Resolver la ecuación $3\mathrm{e}^{2x} + 5 = 11$.

En primer lugar despejamos el término e^{2x}. Obtenemos

$$\mathrm{e}^{2x} = \frac{11-5}{3} = 2,$$

y utilizando la propiedad de funciones inversas, es decir, tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación

$$\ln(\mathrm{e}^{2x}) = 2x = \ln 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ejercicio 12 Resolver la ecuación $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 = 0$.

Ejemplo 13 Resolver la ecuación $4 + 3\ln(2x) = 6$.

En primer lugar despejamos el término $\ln(2x)$. Obtenemos

$$\ln(2x) = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

y utilizando la propiedad de funciones inversas, es decir, tomando exponenciales en ambos lados de la ecuación

$$\mathrm{e}^{\ln(2x)} = 2x = \mathrm{e}^{2/3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{\mathrm{e}^{2/3}}{2}.$$

Ejercicio 14 Se depositan 1000€ en una cuenta de ahorro que genera 4 % de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tarda en duplicarse la inversión?

Ejercicio 15 El número de bacterias de cierto cultivo fue incrementado de 600 a 1800 entre las 7 a.m y las 9 a.m durante un determinado día. Suponiendo que el crecimiento es exponencial y el número de bacterias se triplica cada 3 horas, es decir,

$$N(t) = 600 \cdot 3^{t/2},$$

donde t representa las horas después de las 7 a.m, calcula:

a) El número de bacterias entre las 8 a.m y las 9 a.m, entre las 8 a.m y las 10 a.m y entre las 8 a.m y las 11 a.m.

b) Traza la gráfica de $N(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 5$.

Pablo Álvarez Caudevilla, Cristina Brändle Cerquiera
Curso 0. Matemáticas básicas para la ingeniería
Universidad Carlos III de Madrid