Tema 4. Funciones

Curso Cero MathBridge

Aurora Torrente & Filippo Terragni

Año académico 2020–2021

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

1. Conceptos generales

Una función real f de una variable real x es una 'regla' que asocia a cada valor de $x \in D$ un único número real $y = f(x) \in f(D)$, esto es

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} \;&\longrightarrow\; f(D) \subseteq \mathbb{R} \\ x \;&\longmapsto\; y = f(x) \end{aligned}$$

siendo $f(x)$ el valor de la función f en x. En la definición anterior

$$D \;=\; \mathrm{dom}(f) \;=\; \textbf{dominio de } f \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ tiene sentido} \,\}\ ,$$

$$f(D) \;=\; \mathrm{im}(f) \;=\; \textbf{imágen de } f \;=\; \{\, y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in D \,\}\ .$$

Observamos que muchas veces es posible expresar dicha 'regla' por medio de una ecuación matemática. Sin embargo, en algunos casos es difícil o imposible hallar una fórmula que relacione las variables x e y de la definición, aunque siga siendo posible la asignación de un único valor de y para cada valor de x. Finalmente, el conjunto de puntos del plano cartesiano con coordenadas $(x, f(x))$ constituye la *gráfica* de f.

Ejemplo. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Entonces

$$D \;=\; \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0 \,\right\} \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1 \,\} \;=\; [-1, 1]\,.$$

Por otra parte, la imágen de f está formada por los $y \in \mathbb{R}$ tales que $y = \sqrt{1 - x^2}$ para algún $x \in [-1, 1]$. Por tanto $y \geq 0$ y, siendo $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$, tenemos que $y \in [0, 1]$. Así pues, podemos concluir que $f(D) = [0, 1]$.

A continuación vemos el dominio y la imágen de algunas funciones elementales que discutiremos con más detalle en la sección 2.

- $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $D = \mathbb{R}$, mientras que $f(D) = \mathbb{R}$ si n es impar ó $f(D) = [0, +\infty)$ si n es par.

- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Tenemos que $D = \mathbb{R}$ y $f(D) = [-1, 1]$.

- $f(x) = \cos(x)$. Tenemos que $D = \mathbb{R}$ y $f(D) = [-1, 1]$.

- $f(x) = \tan(x)$. Tenemos que $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots \right\}$, mientras que $f(D) = \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^x$. Tenemos que $D = \mathbb{R}$ y $f(D) = (0, +\infty)$.

Las siguientes definiciones resultan muy útiles.

Definición 1 *Si f y g son dos funciones, entonces la* ***función compuesta*** *de f con g es*

$$h(x) \;:=\; (f \circ g)(x) \;=\; f(g(x))$$

para todo $x \in dom(g)$ tal que $g(x) \in dom(f)$.

Definición 2 *Una función f es* ***inyectiva*** *en $A \subseteq \mathbb{R}$ si para todo $x_1,\, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ tenemos que $x_1 = x_2$. Geométricamente, la gráfica de una función inyectiva interseca cada recta horizontal una vez como mucho.*

Definición 3 *Si la función*

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} \;&\longrightarrow\; f(A) \subseteq \mathbb{R} \\ x \;&\longmapsto\; y = f(x) \end{aligned}$$

es inyectiva, entonces existe su ***función inversa*** *f^{-1} definida como*

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(A) \subseteq \mathbb{R} \;&\longrightarrow\; A \subseteq \mathbb{R} \\ y = f(x) \;&\longmapsto\; x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.

Como veremos en la sección 2, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$. Algunos ejemplos de funciones inversas son:

- $\arcsen : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ es la función inversa de $\operatorname{sen}(x)$.
- $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ es la función inversa de $\cos(x)$.
- $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es la función inversa de $\tan(x)$.
- $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función inversa de e^x.

Definición 4 *Una función* f *es* ***monótona creciente*** *(estrictamente creciente) en* $A \subseteq \mathbb{R}$ *si para todo* $x_1,\, x_2 \in A$ *tales que* $x_1 < x_2$ *se cumple que* $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$*. Una función* f *es* ***monótona decreciente*** *(estrictamente decreciente) en* $A \subseteq \mathbb{R}$ *si para todo* $x_1,\, x_2 \in A$ *tales que* $x_1 < x_2$ *se cumple que* $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$*.*

Aunque no se discutirá aquí, es posible demostrar si una función es monótona usando el concepto de *derivada*. Por otra parte, recordamos que si f es estrictamente monótona en A, entonces f es inyectiva en A y existe f^{-1} en $f(A)$.

Definición 5 *Una función* f *es* ***par*** *si* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \in dom(f)$*. En este caso, la gráfica de* f *es simétrica respecto a la recta* $x = 0$*.*

Definición 6 *Una función* f *es* ***impar*** *si* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in dom(f)$*. En este caso, la gráfica de* f *es simétrica respecto a una rotación de* $180°$ *alrededor del origen.*

Definición 7 *Una función f es* ***periódica*** *de periodo $T > 0$ si $f(x+kT) = f(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in dom(f)$.*

Por ejemplo, $f(x) = \cos(x)$ es una función par, mientras que $f(x) = \text{sen}(x)$ es una función impar; ambas son funciones periódicas de periodo $T = 2\pi$.

2. Funciones elementales

En esta sección, vamos a estudiar las características principales de algunas funciones reales de una variable real conocidas como **funciones elementales**. Generalmente, se entiende por función elemental una función construida a partir de la suma, resta, multiplicación, división y composición de un número finito de polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y sus inversas.

2.1. Polinomios y funciones racionales

Las **funciones polinómicas** atienden a la forma general

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

donde los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ son constantes ($a_n \neq 0$) y la máxima potencia a la que está elevada la variable x determina el *grado* del polinomio (n en este caso). A continuación analizaremos algunos casos en función del grado, obviando el caso de grado cero por tratarse de una función constante.

Grado 1. Los polinomios de primer grado tienen por expresión general

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x,$$

aunque posiblemente estemos más habituados a expresarlos en la forma $y = mx + n$. Reflejan un comportamiento lineal y su representación gráfica es una recta. El valor de m se conoce como *pendiente* e indica la inclinación de la recta, mientras que n indica el valor de y cuando x es nula, de ahí su nombre *ordenada en el origen*.

Grado 2. Los polinomios de segundo grado,

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = c + bx + ax^2,$$

reflejan un comportamiento cuadrático y su representación gráfica es una parábola. A la hora de caracterizar una parábola son varios los aspectos a tener en cuenta.

- Las ramas de la parábola irán hacia arriba si el coeficiente que multiplica a x^2 es positivo y hacia abajo en el caso contrario.
- El vértice de la parábola, el punto en el que se unen las dos ramas, está situado en $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.
- Una parábola puede tener como mucho dos puntos de corte con el eje horizontal, en función del número de soluciones de la ecuación $c + bx + ax^2 = 0$.

En la Figura 4.1 se puede ver la representación gráfica de la parábola $y = 2x^2 - 2x + 3$.

Grado n. La caracterización de los polinomios de grado superior a 2 exige, normalmente, un estudio más detallado. No obstante, hay ciertas características generales a tener presente.

- $P_n(x)$ puede ser evaluado en cualquier $x \in \mathbb{R}$, es decir, su dominio es toda la recta real.

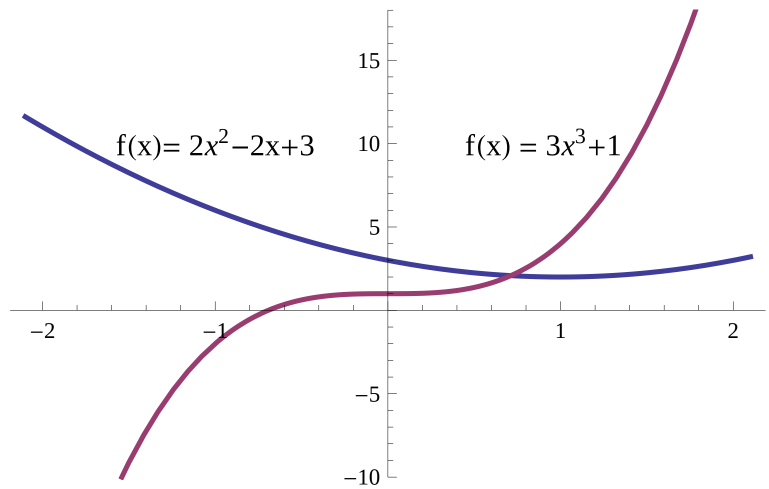

Figura 4.1: Representación gráfica de un polinomio de grado 2 (parábola) y otro de grado 3. Se puede apreciar como, en este caso, la parábola no tiene puntos de corte con el eje horizontal, mientras que el polinomio cúbico sólo posee un punto de corte.

- Si representamos gráficamente cualquier polinomio $P_n(x)$, su gráfica será una curva 'suave'.
- Dependiendo de si el grado n del polinomio es par o impar, los valores de $P_n(x)$ se corresponderán con todos los puntos del eje vertical o no.
- Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n puntos de corte con el eje horizontal.

En la Figura 4.1 pueden apreciarse gráficamente algunas de las propiedades indicadas.

Una **función racional** es una función que se obtiene como cociente de dos polinomios, esto es

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}.$$

El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{x \,|\, Q_m(x) = 0\}$. Las funciones racionales tienen una representación gráfica 'suave' en todo el dominio. En la Figura 4.2 hemos representado la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,,$$

en la cual se pueden apreciar las propiedades antes señaladas.

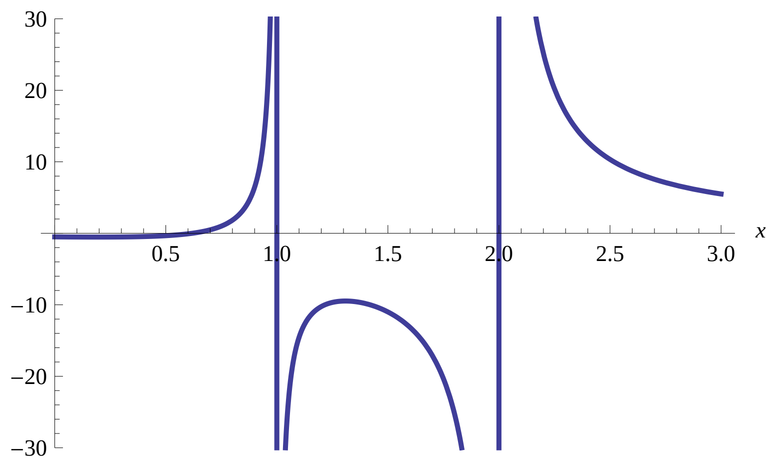

Figura 4.2: Representación gráfica de la función racional $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 1)/(x^3 - 2x^2 - x + 2)$. En los puntos donde se anula el denominador la función no está definida; el resto de puntos pertenecen al dominio y en todos ellos la gráfica de la función viene descrita por una curva 'suave'.

2.2. Funciones potencia

Las **funciones potencia** atienden a la forma general $f(x) = x^r$, donde r es un número real. Dependiendo del valor concreto de r, presentan comportamientos bien diferenciados.

En el apartado anterior, hemos tratado el caso sencillo en el que r es un número natural. En las Figuras 4.3 y 4.4 puede verse la diferencia de comportamiento según el exponente r sea un número entero positivo o negativo.

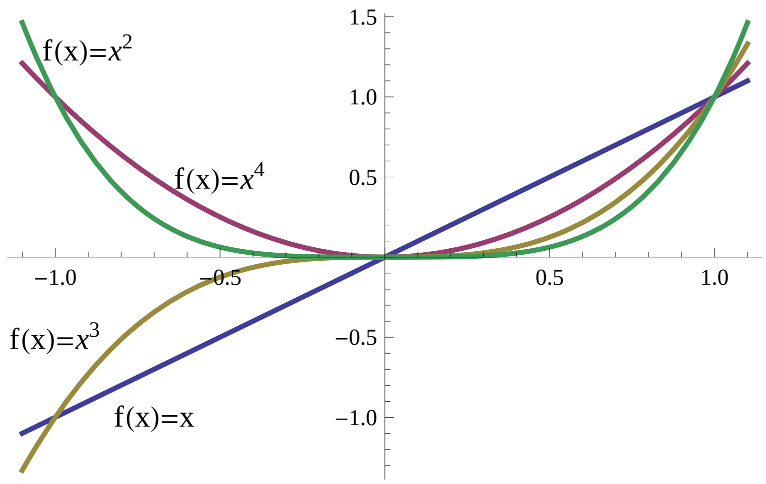

Figura 4.3: Representación gráfica de distintas funciones potencia x^r, con $r \in \mathbb{N}$.

Si r es un número racional, es decir $r = p/q$, con p y q enteros, la función potencia puede ser entendida como la raíz q-ésima de x elevada a p, es decir $f(x) = \sqrt[q]{x^p}$. En este caso, el dominio de la función depende de las paridades de q y p. En concreto, si p es impar y q es par, la variable x no puede tomar valores negativos. En la Figura 4.5 puede verse el comportamiento de las gráficas de algunas funciones del tipo $f(x) = \sqrt[p]{x}$, con $p \in \mathbb{N}$. El caso en el que r no es un número racional es, por lo general, más complicado y no se tratará aquí.

2.3. Funciones trigonométricas y sus inversas

La definición geométrica del **seno** y el **coseno** de una variable angular $\alpha \in [0, 2\pi)$ se supone conocida; recuérdese el clásico esquema mostrado en la Figura 4.6. Para dar

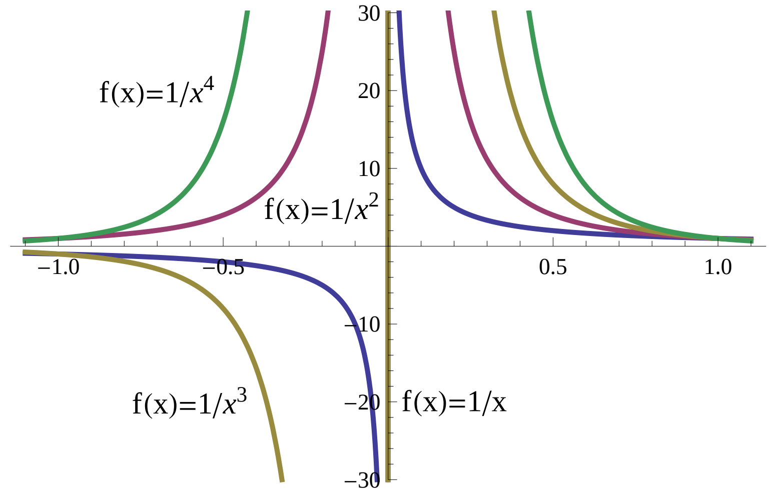

Figura 4.4: Representación gráfica de distintas funciones potencia $x^{-r} = 1/x^r$, con $r \in \mathbb{N}$.

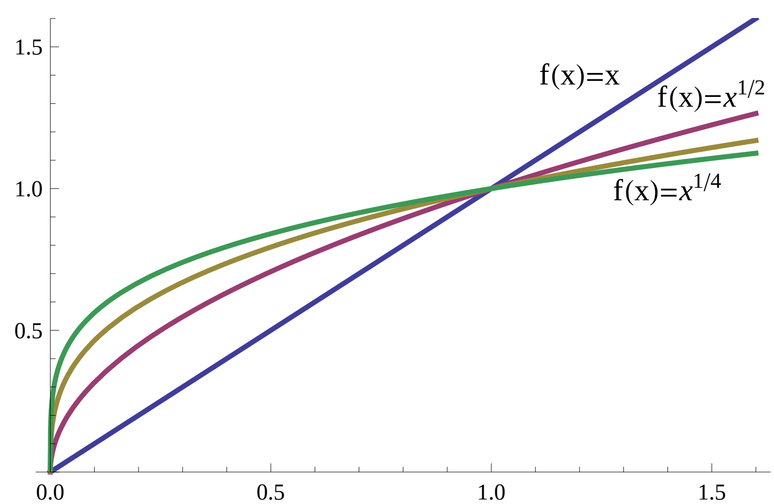

Figura 4.5: Representación gráfica de distintas potencias fraccionarias o raíces.

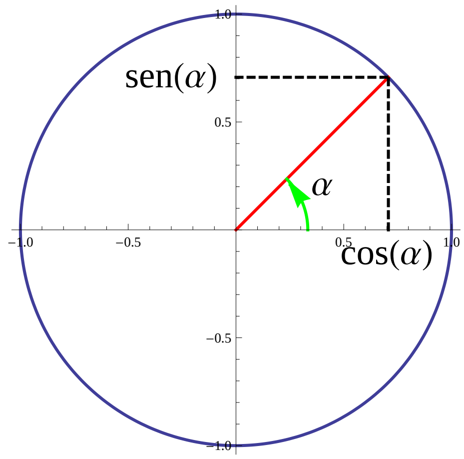

Figura 4.6: Definición geométrica del seno y el coseno de un ángulo α.

sentido a las funciones seno y coseno, $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, en función de un número arbitrario $x \in \mathbb{R}$ basta asociar un ángulo con cada número real. Esta asociación se realiza de la siguiente forma. Sobre la circunferencia de radio unidad, comenzando en el punto $(1, 0)$ y dependiendo del signo de x, se avanza una longitud de arco igual a x en el sentido horario o antihorario. El ángulo así construido se denomina ángulo de x *radianes*. Como es bien sabido, si sobre una circunferencia de radio unidad se avanza una longitud de arco igual a 2π se vuelve al mismo punto, razón por la que tanto el seno como el coseno son funciones periódicas de periodo 2π (véase Figura 4.7).

Son numerosas las propiedades que verifican las funciones seno y coseno, por lo que aquí recordamos únicamente algunas de las más importantes.

- $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)\,,\ \cos(x) = \cos(-x)$.
- $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$.
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.
- $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

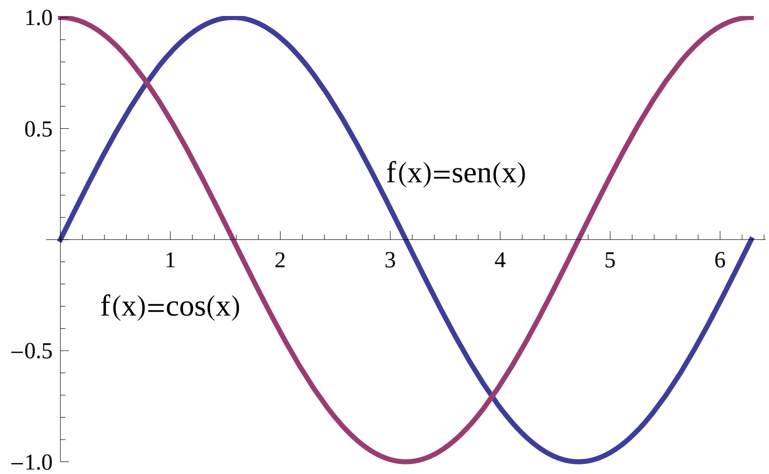

Figura 4.7: Las funciones $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son periódicas, con periodo 2π, y sus gráficas son idénticas salvo por una traslación de $\pi/2$ en la dirección del eje horizontal.

Las otras funciones trigonométricas se definen a partir de las dos anteriores.

- **Función tangente**: $\tan(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$.
- **Función cotangente**: $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$.
- **Función secante**: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
- **Función cosecante**: $\csc(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$.

Hemos definido las funciones trigonométricas como objetos matemáticos que admiten como entrada el valor de un ángulo x y nos devuelven, por ejemplo, el valor del coseno o del seno de dicho ángulo, $x \mapsto \cos(x)$ ó $x \mapsto \mathrm{sen}(x)$. Ahora estamos interesados justo en lo inverso. Por ejemplo, queremos definir una función que, recibido como entrada el valor

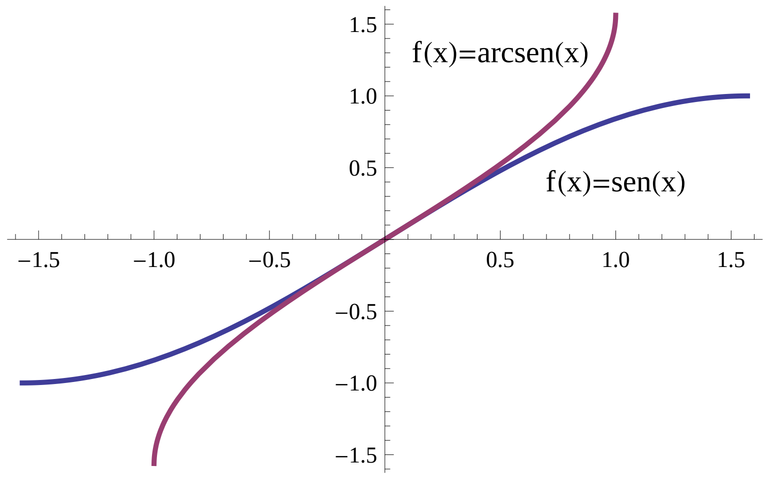

Figura 4.8: Gráficas de las funciones $\text{sen}(x)$ y su inversa $\text{arc}\,\text{sen}(x)$. Observamos la simetría respecto a la recta $y = x$.

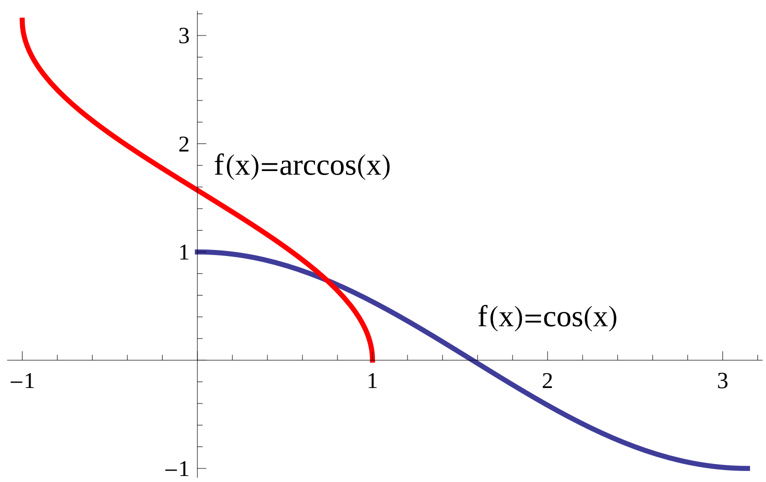

Figura 4.9: Gráficas de las funciones $\cos(x)$ y su inversa $\text{arc}\cos(x)$. Observamos la simetría respecto a la recta $y = x$.

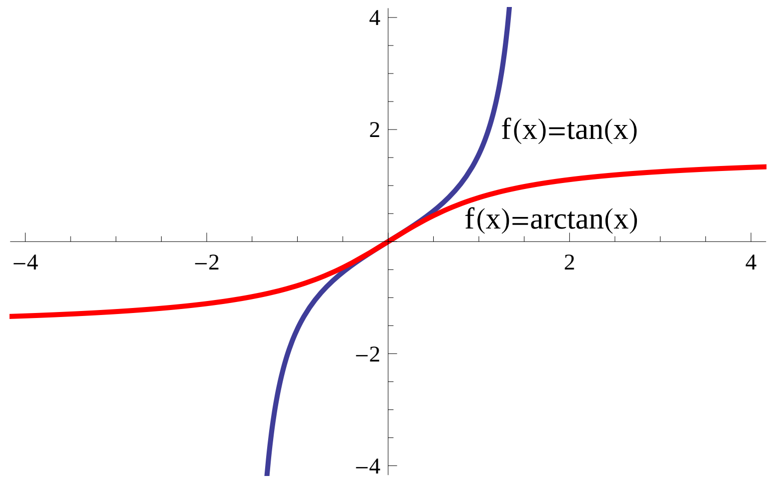

Figura 4.10: Gráficas de las funciones $\tan(x)$ y su inversa $\arctan(x)$. Observamos la simetría respecto a la recta $y = x$.

del coseno de un ángulo, nos devuelva el valor de dicho ángulo. De esta forma se construyen las **funciones trigonométricas inversas**. Obviamente existen tantas funciones trigonométricas inversas como funciones trigonométricas, no obstante nos fijaremos en las tres más importantes.

- La función inversa del seno es el **arcoseno**, $\operatorname{arc\,sen}(x)$.
- La función inversa del coseno es el **arcocoseno**, $\arccos(x)$.
- La función inversa de la tangente es la **arcotangente**, $\arctan(x)$.

Debemos tener presente que tanto la función arcoseno como la función arcocoseno no pueden ser evaluadas en puntos fuera del intervalo $[-1, 1]$. Este no es el caso de la arcotangente, cuyo dominio incluye cualquier punto de la recta real. Por otra parte, es bien sabido que para un valor determinado del coseno (o cualquier otra función trigonométrica) existen infinitos ángulos cuyo coseno nos proporciona dicho valor. Por esta razón, es necesario restringir el dominio de definición de las funciones trigonométricas 'directas' para poder dar sentido a sus inversas.

En las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10 están representadas las gráficas de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente, respectivamente. En dichas figuras se observa la relación que cada una de ellas tiene con su correspondiente función 'directa'.

2.4. Exponencial y logaritmo

De forma general, la **función exponencial** puede escribirse como $f(x) = a^x$, donde a debe ser un número real positivo, conocido como base. En la Figura 4.11 está representado el comportamiento típico de la función exponencial y se pueden apreciar las siguientes propiedades.

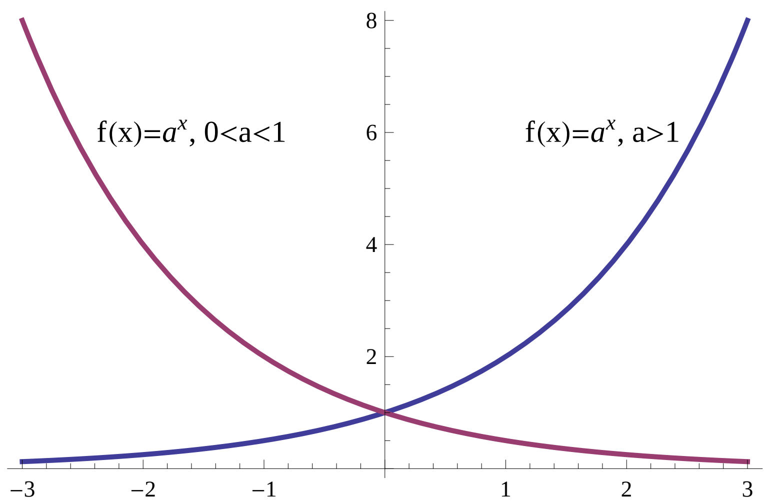

Figura 4.11: Comportamiento de la función exponencial dependiendo de la base.

- La función exponencial puede ser evaluada en cualquier número real, es decir su domino es toda la recta real.

- $f(x) = a^x$ es una función positiva, esto es $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$ la función exponencial crece tanto como queramos sin más que aumentar el valor de x. Si $0 < a < 1$, la función tiende a cero cuando x crece.

- La base más importante de la función exponencial la proporciona el número irracional $e = 2{,}71828\ldots$.

- Si $0 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ cuando $x > 0$ y $b^x < a^x$ cuando $x < 0$.

- Dado un número real $y > 0$, existe un único número real x tal que se cumple $y = a^x$. A dicho x se conoce como logaritmo en base a de y, en símbolos $x = \log_a(y)$.

En el último punto se introduce la **función logaritmo** en base a, $\log_a(x)$, como la función inversa de la función exponencial de la misma base, a^x. Si nos fijamos en la Figura 4.12, podemos apreciar la relación que guardan las gráficas de ambas funciones. Usando

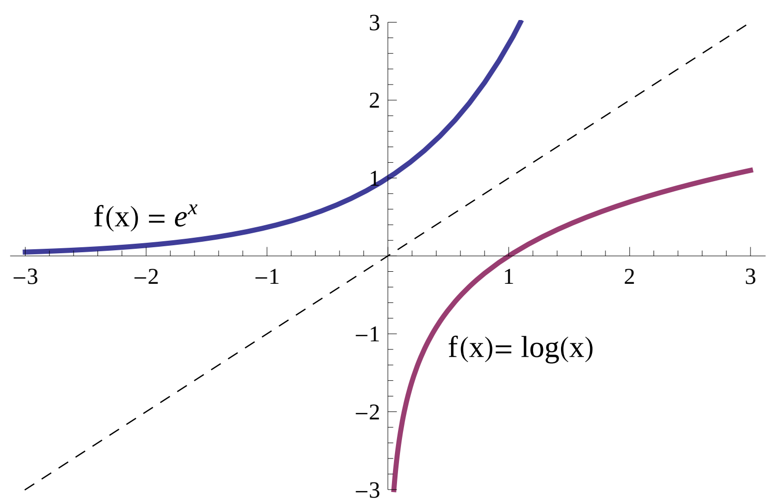

Figura 4.12: Funciones exponencial y logaritmo en base e.

las propiedades de la función exponencial es posible deducir las propiedades de la función logaritmo. Algunas de las más importantes son las siguientes.

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a(x) = \log_b(x)\ \log_a(b)$.
- Puesto que la función logaritmo es la función inversa de la función exponencial, la imágen de la función logaritmo coincide con toda la recta real.

De igual forma que sucede con la función exponencial, cuando no se especifica la base de un logaritmo por regla general se sobrentiende que se trabaja con la función logaritmo en base e, también conocida como logaritmo *natural* ó *neperiano*. La función logaritmo natural se representa mediante $\ln(x)$ ó $\log(x)$.

3. Representación gráfica de funciones

En esta sección vamos a repasar, mediante algunos ejemplos, aquellas propiedades básicas de las funciones reales de una variable real que habitualmente se estudian para poder *esbozar* sus gráficas. Recordamos que para representar gráficamente una función con más precisión se necesitan nociones que no trataremos aquí (como el concepto de derivada). Así pues, nos fijaremos simplemente en las siguientes propiedades: dominio, cortes con los ejes, simetrías, periodicidad y asíntotas.

Dominio. Como definimos en la sección 1, el dominio de una función es el conjunto de números reales para los que la función está definida. Para estudiar el dominio es conveniente recordar y tener en cuenta las propiedades de las funciones elementales. Los ejemplos de las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15 resultan ilustrativos en este contexto.

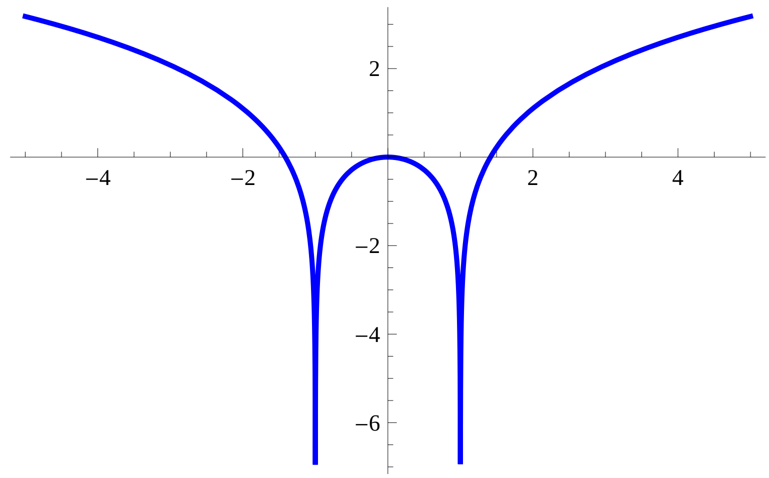

Figura 4.13: Gráfica de la función $f(x) = \log|x^2 - 1|$. Nótese que los puntos $x = \pm 1$ no pertenecen al dominio de la función. La gráfica tiene cortes con el eje horizontal y el eje vertical.

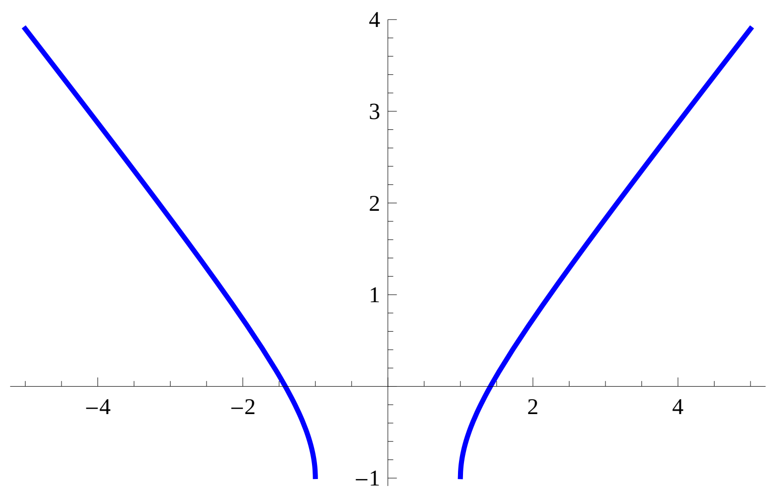

Figura 4.14: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$. Nótese que los puntos del intervalo $(-1, 1)$ no pertenecen al dominio de la función. La gráfica corta al eje horizontal pero no al eje vertical.

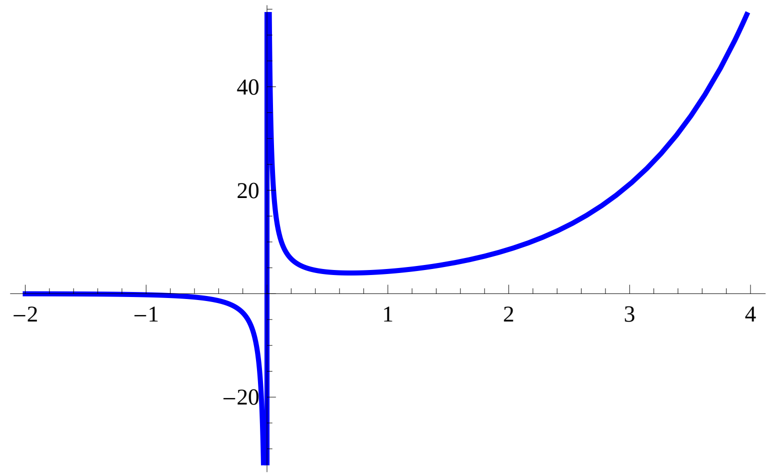

Figura 4.15: Gráfica de la función $f(x) = e^{2x}/(e^x - 1)$. Nótese que el punto $x = 0$ no pertenece al dominio de la función. La gráfica no corta al eje vertical.

Cortes con los ejes. Los cortes de una función con el eje horizontal se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Por otro lado, los cortes con el eje vertical se calculan considerando $x = 0$, si el origen pertenece al dominio de f. Las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15 ilustran lo expuesto.

Simetrías.

- Respecto al eje vertical (funciones *pares*): se debe verificar que $f(-x) = f(x)$, con x perteneciente al dominio de f.
- Respecto al origen (funciones *impares*): se debe verificar que $f(-x) = -f(x)$, con x perteneciente al dominio de f.

¿Por qué no tiene sentido estudiar simetrías de una función respecto al eje horizontal? Las Figuras 4.16 y 4.17 ilustran lo descrito.

Periodicidad. Normalmente entra en juego cuando aparecen funciones trigonométricas.

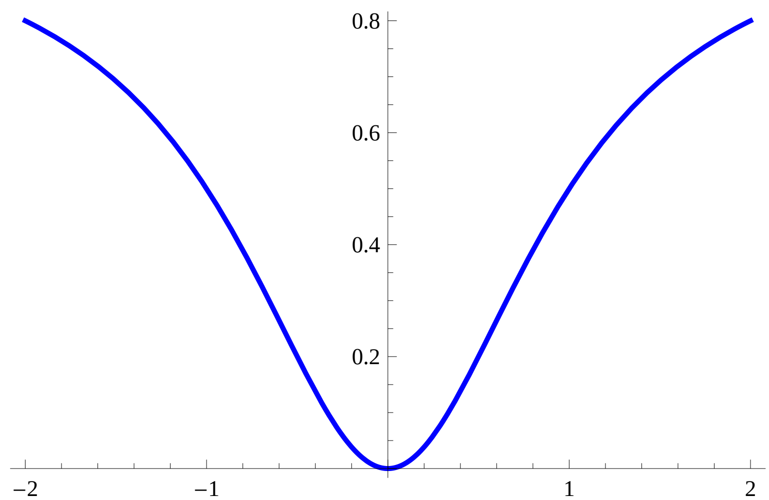

Figura 4.16: Gráfica de la función $f(x) = x^2/(x^2+1)$. Nótese que la función es par.

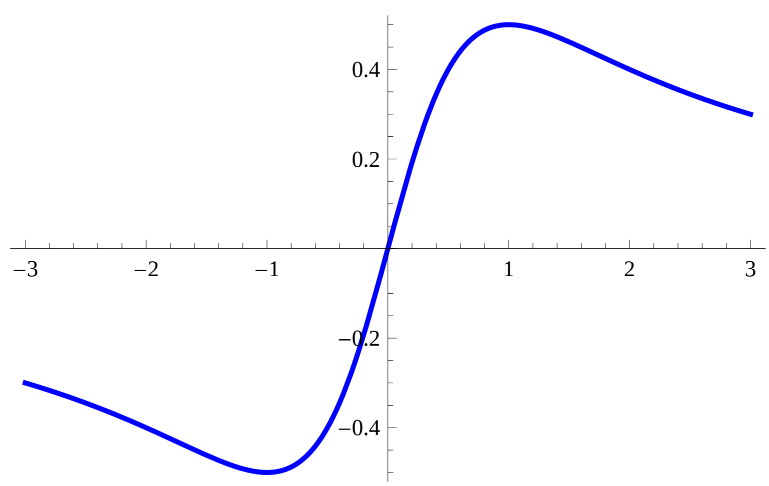

Figura 4.17: Gráfica de la función $f(x) = x/(x^2+1)$. Nótese que la función es impar.

No obstante, en general, hay que considerar la posibilidad de que la función bajo estudio sea periódica, según la definición introducida en la sección 1. La Figura 4.18 muestra un ejemplo de función periódica.

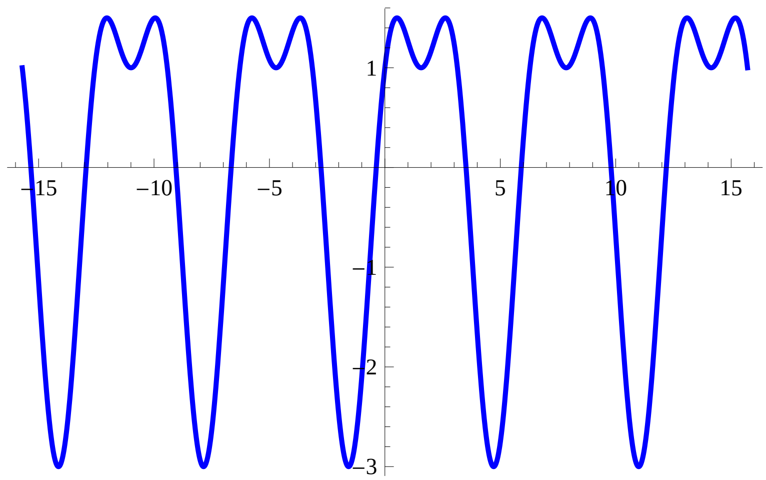

Figura 4.18: Gráfica de la función $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + \cos(2x)$. Nótese que la función es periódica con periodo 2π.

Asíntotas.

- Asíntotas *verticales*: su ecuación es $x = a$, dónde el punto a no pertenece al dominio de f y debe verificarse que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.
- Asíntotas *horizontales*: su ecuación es $y = k$ y debe cumplirse que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$.
- Asíntotas *oblicuas*: su ecuación es $y = mx + n$, con $m \neq 0$ y $n \in \mathbb{R}$. Los valores de m y n se deducen a partir de $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

Notése que, para aplicar las definiciones anteriores, hay que recurrir a la noción de *límite* que aquí no se discute. Las Figuras 4.19 y 4.20 muestran ejemplos de funciones con asíntotas.

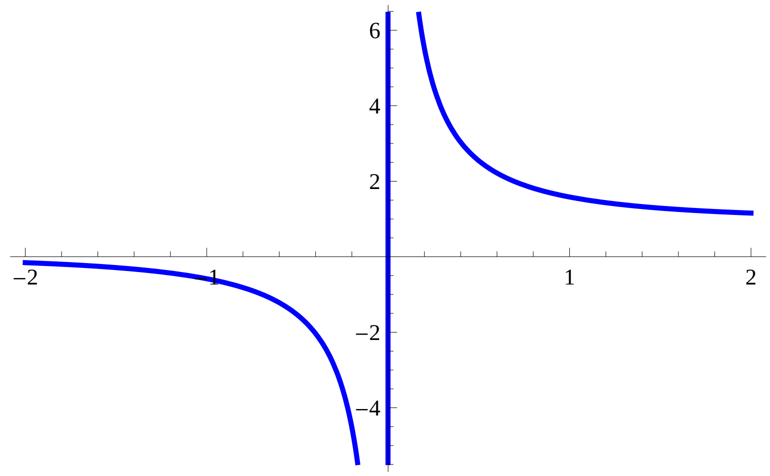

Figura 4.19: Gráfica de la función $f(x) = e^x/(e^x - 1)$. Las rectas $y = 0$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales.

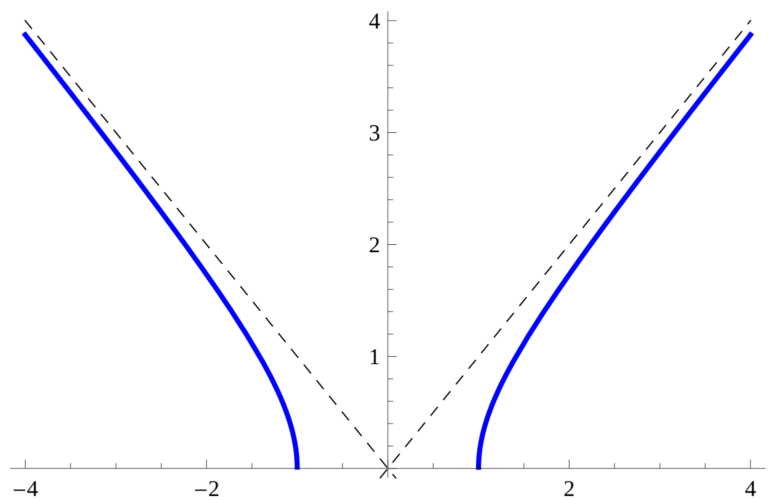

Figura 4.20: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ con dos asíntotas oblicuas, $y = \pm x$.