Tema 3. Geometría analítica en el plano y en el espacio

Curso Cero MathBridge

Aurora Torrente & Filippo Terragni

Año académico 2020–2021

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

1. Geometría analítica en el plano

1.1. Lugares geométricos en el plano

Un **lugar geométrico** es el conjunto de los puntos del plano que verifican alguna condición geométrica. Algunos ejemplos son los siguientes:

- **circunferencia**: el conjunto de puntos (lugar geométrico) que equidistan r unidades de un punto fijo C llamado centro;
- **recta**: el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos;
- **mediatriz** de un segmento: el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento;

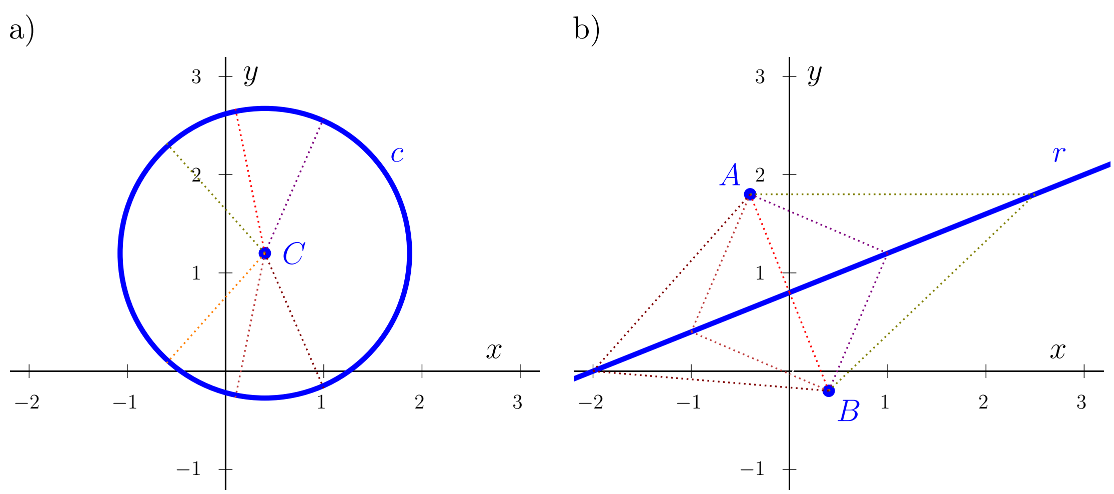


Figura 3.1: a) Lugar geométrico c de los puntos que equidistan del punto C. b) Lugar geométrico r de los puntos del plano que equidistan de los puntos A y B.

- **bisectriz** de un ángulo: el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de dicho ángulo.

Como vemos, podemos describir un lugar geométrico a través de la característica geométrica que lo define, pero en muchas ocasiones estaremos interesados en describir dicho lugar por medio de una ecuación.

1.2. Ecuación de una recta

Sabemos que existen diferentes maneras de expresar una recta. Introduciremos los conceptos básicos y enumeraremos los distintos tipos de ecuaciones.

Recordemos que para definir completamente una recta nos basta con conocer su dirección y uno de los puntos que la forman, que nos dará su posición. La dirección de la recta puede ser descrita por medio de *cualquier* vector (libre) con la misma dirección; en tal caso, el vector se denomina **vector director** de la recta. Si sabemos que una recta tiene vector director $\overrightarrow{v}$, de coordenadas (v_1, v_2) y pasa por el punto P, de coordenadas (x_0, y_0), y denotamos por (x, y) a las coordenadas cartesianas de los puntos que forman dicha recta, podemos describirla mediante:

- la **ecuación vectorial**: $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_1, v_2)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$; para cada valor de λ obtenemos un punto de la recta,
- la **ecuación paramétrica**: $\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{array}\right\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,
- la **ecuación continua**: $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$,
- la **ecuación punto-pendiente**: $y - y_0 = \dfrac{v_2}{v_1}(x - x_0)$, donde $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ se denomina pendiente de la recta e indica la inclinación de la misma: es el valor de la tangente

del ángulo que la recta forma con el eje X. Por tanto, la ecuación se puede escribir:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Si $v_2 = 0$, la recta es horizontal; si $v_1 = 0$, la recta es vertical; obsérvese que ambas componentes no pueden ser 0 simultáneamente, porque entonces no se trataría de un vector director. En el resto de casos, la pendiente puede ser positiva o negativa.

- la **ecuación implícita**: $Ax + By + C = 0$. Conocida esta ecuación, se puede obtener un vector director de la recta de la forma $\overrightarrow{v} = (-B, A)$. El vector $\overrightarrow{n} = (A, B)$ es perpendicular a la recta y se denomina **vector normal** de la recta.

- la **ecuación explícita**: $y = mx + n$, donde m es, igual que antes, la pendiente de la recta y n se denomina ordenada en el origen o intercepto, y es el valor de la ordenada en la que la recta corta al eje Y.

1.3. Posiciones relativas de rectas

Desde un punto de vista geométrico, la posición relativa de dos rectas es sencilla:

- Rectas **secantes**: las rectas tienen un único punto en común (se cortan).

- Rectas **paralelas**: no tienen ningún punto en común. En este caso, la pendiente de ambas rectas es la misma.

- Rectas **coincidentes**: tienen infinitos puntos en común (son la misma recta).

Para determinar las posiciones relativas de dos rectas existen distintos métodos. Recordemos dos de ellos:

Usando vectores directores:

1. Calcular los vectores directores de las dos rectas. Si no son paralelos, las rectas son SECANTES.

2. Si los vectores son paralelos, tomar un punto cualquiera de una de las rectas y determinar si es también un punto de la otra. Si lo es, las rectas son COINCIDENTES; si no lo es, las rectas son PARALELAS.

Resolviendo un sistema:

1. Escribir las ecuaciones de las rectas en forma implícita y formar con ellas un sistema.

2. Si al resolver el sistema este tiene solución única, las rectas son SECANTES; si existen infinitas soluciones, las rectas son COINCIDENTES; si el sistema es incompatible, las rectas son PARALELAS.

1.4. Problemas métricos

Las fórmulas que incluimos a continuación, aprendidas en el bachillerato, nos pueden ser útiles para resolver ciertos problemas métricos:

- **Punto medio de un segmento** de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Las coordenadas del punto medio M son

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

- **Distancia de un punto a una recta**. Dados una recta r con ecuación implícita $Ax + By + C = 0$ y un punto P de coordenadas (x_0, y_0), exterior a la recta, la distancia entre r y P se calcula mediante:

$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

- **Punto simétrico a otro respecto a una recta**. Dados una recta r y un punto P exterior a ella, el punto simétrico P' de P respecto a r se calcula mediante:

  $$P' = Q + \overrightarrow{PQ},$$

  siendo Q el punto de r de distancia mínima a P, que cumple que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta r.

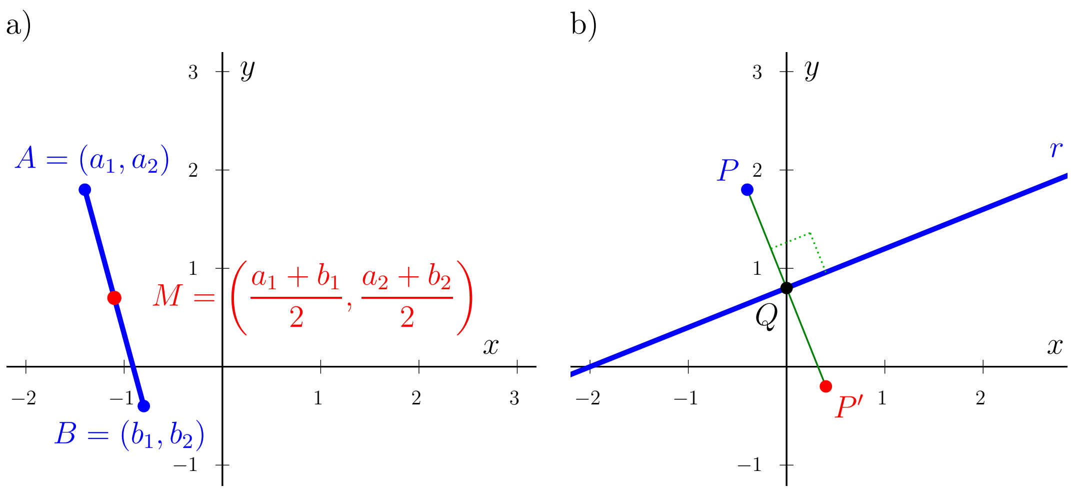


Figura 3.2: a) Punto medio M del segmento AB. b) Punto P' simétrico a P respecto a la recta r; el punto Q es el punto medio del segmento PP'.

Con los conceptos aprendidos hasta ahora somos capaces de resolver muchos problemas métricos, mucho más complicados que escribir la ecuación de una recta o de determinar las posiciones relativas de dos rectas. Por ejemplo, sabemos:

- Calcular la distancia entre dos puntos, *calculando el módulo del vector que une dichos puntos.*

- Determinar el ángulo entre dos rectas, *hallando el ángulo que forman sus vectores directores mediante el producto escalar.*

- Determinar los ángulos de un triángulo descrito a través de sus vértices, *usando también el producto escalar.*

- Hallar la mediatriz de un segmento, *hallando la recta que pasa por el punto medio del segmento y que es perpendicular al mismo.*

- Hallar la bisectriz de un ángulo, formado por dos rectas r y s, *imponiendo la condición de que la distancia de los puntos de la bisectriz a la recta r sea la misma que entre dichos puntos y la recta s.*

2. Geometría analítica en el espacio

2.1. Rectas en el espacio

Al igual que en el plano, una recta r en el espacio queda completamente determinada por un punto P contenido en la recta, con coordenadas (x_0, y_0, z_0) y un vector director $\overrightarrow{v}$, de coordenadas (v_1, v_2, v_3), cuya dirección es paralela a la de la recta. En el espacio también existen diferentes ecuaciones con las que describir una recta. En concreto:

- la **ecuación vectorial**: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,

- la **ecuación paramétrica**: $\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{array}\right\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,

- la **ecuación continua**: $\dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}$,
- la **ecuación implícita**: $\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$.

2.2. Planos en el espacio

Como es bien sabido, un plano π en el espacio viene determinado por un punto $P \in \pi$ y dos vectores directores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, de coordenadas no proporcionales, paralelos al plano. Si P tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y los vectores directores tienen coordenadas respectivas (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3), las diversas maneras de describir analíticamente un plano son las siguientes:

- la **ecuación vectorial**: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; para cada valor de λ y cada valor de μ obtenemos un punto del plano,
- la **ecuación paramétrica**: $\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- la **ecuación implícita**: $Ax+By+Cz+D = 0$. Conocida esta ecuación, se puede obtener el vector normal o perpendicular a la recta, que viene dado por $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

2.3. Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Dados dos planos $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$ y $\pi' : A'x+B'y+C'z+D' = 0$, podemos construir un sistema de ecuaciones con estas dos expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\},$$

que tiene matriz ampliada

$$\mathbb{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array} \right).$$

Como en el caso de la posición relativa de dos rectas, estudiando el sistema anterior, que *nunca podrá ser compatible determinado*, podemos llegar a los siguientes casos:

- Los planos son COINCIDENTES: esto ocurre cuando existen infinitas soluciones y todos los puntos de uno de los planos forman parte del otro, es decir, una de las ecuaciones es proporcional a la otra; según el teorema de Rouché-Fröbenius, esto ocurre cuando $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 1$.

- Los planos son SECANTES: esto ocurre cuando existen infinitas soluciones pero no todos los puntos de uno de los planos forman parte del otro; según el teorema de Rouché-Fröbenius, esto ocurre cuando $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 2$.

- Los planos son PARALELOS: esto ocurre cuando no existe solución; según el teorema de Rouché-Fröbenius, esto ocurre cuando $1 = rg(\mathbb{A}) < rg(\mathbb{A}^*) = 2$.

2.4. Posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio

Del mismo modo podemos estudiar la posición relativa de una recta r, con ecuación implícita:

$$\left. \begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\}$$

y un plano π, con ecuación implícita

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

Para ello escribimos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano, que tendrá matriz ampliada

$$\mathbb{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array} \right).$$

y analizamos las posibles opciones que se pueden presentar en dicho sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 3$ existe solución única: la recta y el plano son SECANTES y se cortan en un punto.
- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 2$ existen infinitas soluciones y la recta está CONTENIDA en el plano.
- Si $2 = rg(\mathbb{A}) < rg(\mathbb{A}^*) = 3$ no existe solución: la recta y el plano son PARALELOS.

Obsérvese que el rango de $\mathbb{A}$ no puede ser inferior a 2, ya que en dicho caso no tendríamos un plano.

2.5. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Finalmente, podemos estudiar las posiciones relativas de dos rectas, r y s, con ecuaciones implícitas:

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{array} \right\},$$

respectivamente, a través de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 3$ existe solución única: las dos rectas son SECANTES y se cortan en un punto.

- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = 2$ existen infinitas soluciones por lo que las rectas son COINCIDENTES.

- Si $2 = rg(\mathbb{A}) < rg(\mathbb{A}^*) = 3$ no existe solución, pero los vectores directores son proporcionales: las rectas son PARALELAS.

- Si $3 = rg(\mathbb{A}) < rg(\mathbb{A}^*) = 4$ no existe solución y los vectores directores no son proporcionales: las rectas SE CRUZAN.

3. Otros lugares geométricos

Los lugares geométricos de la recta y el plano tienen características ecuaciones implícitas de carácter lineal. Vamos a repasar brevemente algunos lugares geométricos planos un poco más complicados, que vienen expresados mediante ecuaciones de segundo grado (en las variables x e y), que se denominan **cónicas** y que deben su nombre al hecho de que todas ellas pueden obtenerse cortando un cono con un plano.

Existen tres tipos de cónicas:

- las **elipses**,
- las **circunferencias**, que analíticamente son un caso particular de las anteriores,
- las **parábolas**, y
- las **hipérbolas**.

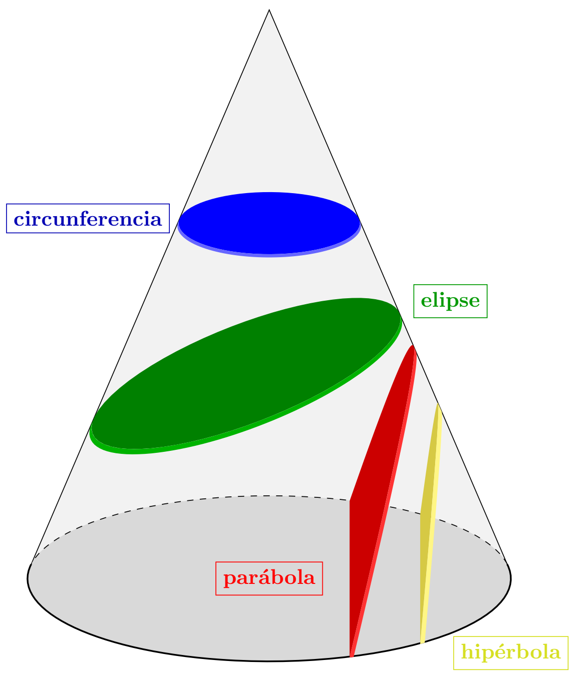


Figura 3.3: Cónicas que pueden obtenerse mediante la intersección de un cono y un plano. La circunferencia se obtiene cortando el cono con un plano paralelo a su base (o perpendicular al eje) que no pase por el vértice. Para la elipse el corte debe ser oblicuo a la base y cortar a todas las generatrices (de una sección del cono) sin que pase por el vértice. La parábola resulta de cortar el cono con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al de su generatriz, sin pasar por el vértice. Para obtener una hipérbola el plano debe cortar ambas secciones el cono.

La circunferencia:

Una circunferencia, como vimos al comienzo del tema, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una distancia r, llamada **radio**, de un punto $P = (x_0, y_0)$, llamado **centro** (ver figura 3.1.a). Su ecuación viene dada por la expresión:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$

Una manera alternativa de escribir la ecuación anterior es mediante la expresión:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

donde $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ y $C = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

La elipse:

Dados dos puntos F_1 y F_2, llamados **focos**, una elipse es el lugar geométrico de los puntos Q cuya suma de distancias a los focos es constante: $d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$.

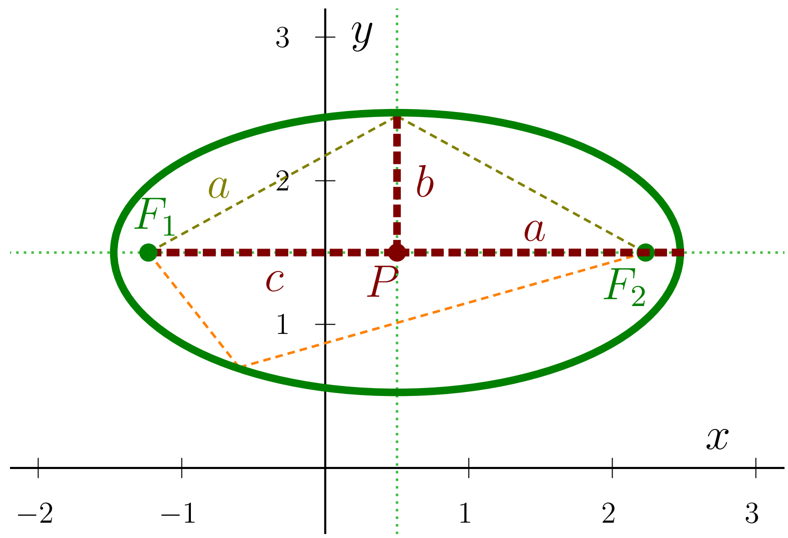


Figura 3.4: Lugar geométrico de los puntos Q cuya suma de distancias a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a una cantidad $2a$. La distancia entre los focos es $2c$. Las distancias del centro P a los vértices de la elipse (donde los ejes de esta la cortan) son a y b. Las cantidades a, b y c satisfacen el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

La distancia entre los focos se llama **distancia focal**, y se denota por $2c$. Si definimos la cantidad b mediante la expresión $b^2 = a^2 - c^2$, entonces podemos describir una elipse como sigue. Dados dos números positivos a y b y un punto $P = (x_0, y_0)$, llamado **centro**, una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano dado por la ecuación:

$$\boxed{\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1}$$

Obsérvese la relación de los números a y b con los focos F_1 y F_2 de la definición anterior en la figura 3.4.

La cantidad $e = \dfrac{c}{a}$ se denomina **excentricidad** de la elipse y es un número entre 0 y 1, ya que $a > c \geq 0$. Cuando $e = 0$, la elipse es una circunferencia; el valor $e = 1$ no puede alcanzarse.

La parábola:

La ecuación de la parábola es bien conocida desde muchos cursos atrás, y la repasaremos en el tema 4. Su definición como lugar geométrico es la siguiente. Dados un punto F llamado **foco** y una recta r llamada **directriz**, una parábola es el lugar geométrico de los puntos Q que tienen la misma distancia al foco que a la directriz: $d(Q, F) = d(Q, r)$. Si llamamos $|p|$ a la distancia entre el foco y la directriz, entonces podemos dar la siguiente definición alternativa. Dado un número p estrictamente positivo o estrictamente negativo (pero no nulo), una parábola vertical con vértice en el punto V con coordenadas (x_0, y_0) es el lugar geométrico dado por la ecuación

$$\boxed{y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p}.}$$

Obsérvese que considerar p positivo o negativo hace que las ramas de la parábola estén hacia arriba o hacia abajo. En general, la ecuación de la parábola puede escribirse de manera más compacta de la forma habitual:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a = \dfrac{1}{2p}$, $b = -\dfrac{x_0}{p}$ y $c = \dfrac{x_0^2}{2p} + y_0$.

Intercambiando x e y tendremos una parábola horizontal, con ecuación:

$$\boxed{x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{2p}.}$$

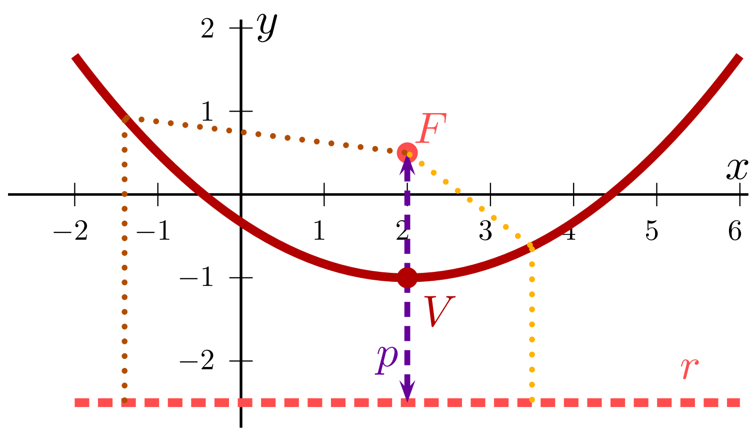


Figura 3.5: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta directriz r y del foco F. La distancia entre F y r es p. El mínimo de la curva, el vértice V, de coordenadas (x_0, y_0), se encuentra en el eje de simetría de la parábola, de ecuación $y - y_0 = \dfrac{(x-x_0)^2}{2p}$.

La hipérbola:

Finalmente consideramos las hipérbolas, que se definen de la siguiente manera. Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados **focos**, una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos Q cuya diferencia de distancias a los focos es constante: $|d(Q, F_1) - d(Q; F_2)| = 2a$. Si la distancia entre los focos (**distancia focal**) es $2c$ y definimos la cantidad b mediante $b^2 = c^2 - a^2$, entonces la ecuación de la hipérbola sería:

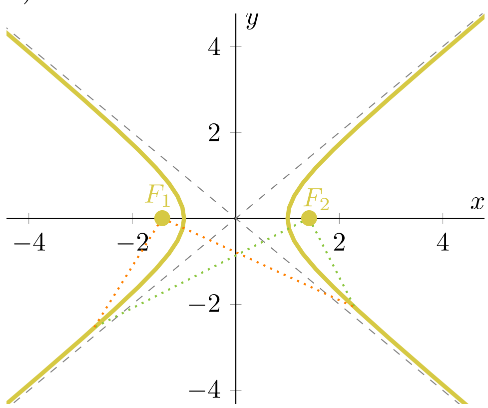
$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.}$$

Al igual que en el caso de la elipse, podemos definir la **excentricidad** de la hipérbola como la cantidad $e = \dfrac{c}{a}$, que es siempre mayor que 1. La hipérbola presenta dos asíntotas oblícuas dadas por las expresiones

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

(Las asíntotas las repasaremos en el tema 4.)

a)



b)

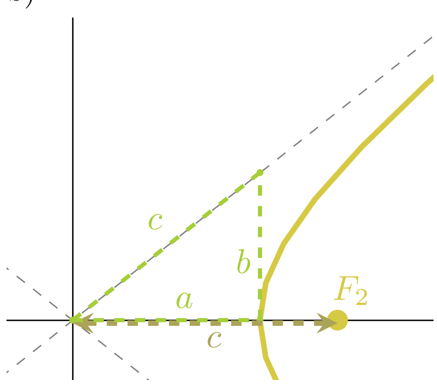


Figura 3.6: a) Lugar geométrico de los puntos Q cuya diferencia de distancias a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a una cantidad $2a$. La distancia entre los focos es $2c$. Las asíntotas están representadas en gris. b) Los puntos de la hiperbola cumplen la ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Las cantidades a, b y c satisfacen el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.