

Tema 2. Álgebra Lineal

Curso Cero MATHBRIDGE

Aurora Torrente & Filippo Terragni

Año académico 2020–2021

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

1. Vectores

1.1. Puntos. Vectores fijos y vectores libres

Recordemos que un **sistema de referencia cartesiano** es un par (para el plano) o una terna (para el espacio) de rectas numéricas perpendiculares entre sí, que denominamos **ejes coordenados**, y que se cortan en un único punto que denominamos **origen de coordenadas**. Un **punto**, del plano o del espacio, no es más que una posición en el mismo, que suele representarse con alguna letra mayúscula ($A, B, P, Q, \dots$). Para localizar de manera precisa y única un punto, utilizamos sus **coordenadas** respecto al sistema de referencia cartesiano elegido.

Un **vector fijo** es un segmento orientado: el vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector con origen en el punto A y extremo final en el B y lo podemos interpretar como la representación de un movimiento (desde el origen hasta el final).

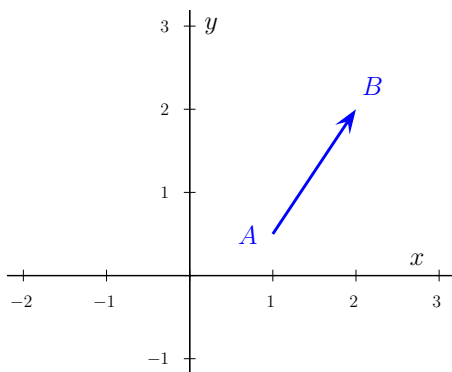
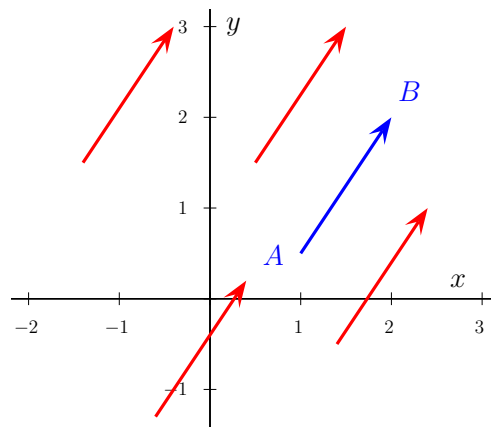


Figura 2.1: El vector fijo $\overrightarrow{AB}$ del plano tiene origen en el punto A , de coordenadas $(1, 1/2)$, y extremo final en el punto B , de coordenadas $(2, 2)$.

En todo vector se pueden definir tres elementos ya conocidos, de interpretación geométrica inmediata: su dirección (la “inclinación” de la recta a lo largo de la cual se produce el movimiento), su sentido (desde el origen hasta el final, o, intuitivamente, el que viene indicado por la “punta” de la flecha) y su módulo (que indica la longitud del vector). Los vectores con igual dirección, sentido y módulo se denominan vectores equivalentes.

Figura 2.2: Todos los vectores rojos tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo que el vector $\overrightarrow{AB}$. Todos ellos son equivalentes entre sí.



El conjunto de todos los vectores equivalentes a uno dado se denomina **vector libre**. Las características de interés son exclusivamente dirección, sentido y módulo, y no los puntos inicial y final, ya que carecen de posición fija.

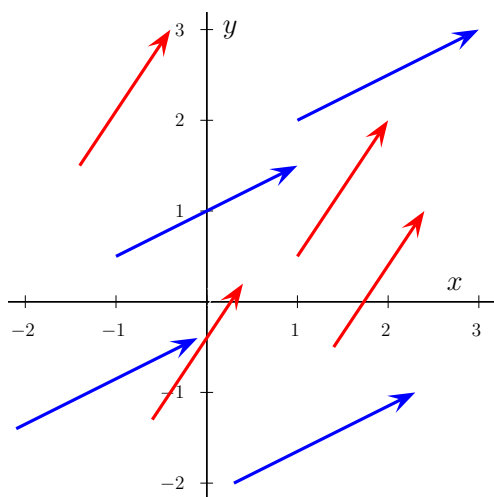


Figura 2.3: Los vectores rojos son equivalentes entre sí; todos ellos representan un mismo vector libre, diferente del representado por los vectores azules, que a su vez son equivalentes entre sí.

Es habitual representar tales vectores por una letra, por ejemplo $\vec{u}$, y *dibujarlos* con su extremo final sobre el origen de coordenadas, aunque en ocasiones, como veremos más tarde, se utilizan representantes más convenientes.

Recordemos que el vector cuyo punto inicial coincide con el final se denomina **vector cero**, y se representa mediante el símbolo $\vec{0}$. Obviamente, este vector tiene módulo 0.

Operaciones (lineales) con vectores libres:

Las siguientes operaciones con vectores libres son bien conocidas:

- **Suma de vectores:** Para sumar *gráficamente* dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el origen del otro vector. El vector suma se *dibuja* uniendo el extremo inicial del primero con el final del segundo, como se muestra en la figura 2.4.

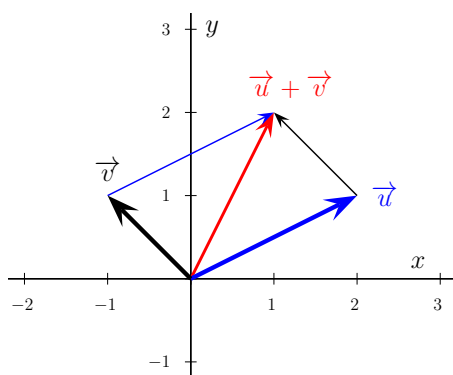
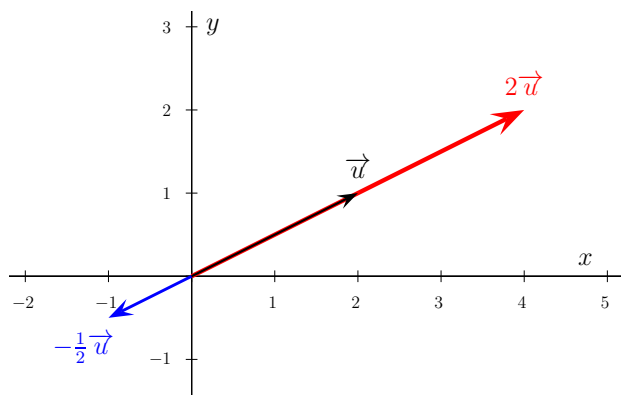


Figura 2.4: La suma del vector $\vec{u}$ y del vector $\vec{v}$ proporciona el vector $\vec{u} + \vec{v}$. Para *dibujar* el vector suma podemos elegir representantes convenientes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

- **Producto de un número (real) por un vector:** El producto de un número $k \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u}$ con las siguientes propiedades:
 - $k\vec{u}$ tiene igual dirección que el vector $\vec{u}$;
 - $k\vec{u}$ tiene mismo sentido que el vector $\vec{u}$ si k es positivo;
 - $k\vec{u}$ tiene sentido contrario al vector $\vec{u}$ si k es negativo;
 - $k\vec{u}$ tiene módulo $|k||\vec{u}|$.

Figura 2.5: Producto del vector $\vec{u}$ por un k positivo, de módulo mayor que 1 (vector $2\vec{u}$) y por un k negativo, de módulo menor que 1 (vector $-\frac{1}{2}\vec{u}$).



Combinación lineal de vectores:

La aplicación sucesiva de las operaciones anteriores da lugar al siguiente concepto. Una **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ es una expresión de la forma:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n,$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales cualesquiera denominados **coeficientes**.

Se dice que $\vec{u}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ si se puede escribir

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n.$$

Vectores linealmente dependientes y linealmente independientes

Un conjunto de vectores se dice que es **linealmente dependiente** cuando uno cualquiera de ellos se puede escribir como combinación lineal del resto. Otra forma alternativa de definirlo es: un conjunto de vectores es linealmente dependiente cuando podemos escribir el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos sin que los coeficientes sean todos cero.

Adicionalmente, un conjunto de vectores se dice que es **linealmente independiente** cuando ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal del resto. O de forma

alternativa, si el vector $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de ellos solo cuando todos los coeficientes son 0. Es decir:

$\text{si } a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \text{ entonces necesariamente } a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$
--

1.2. Bases de vectores

Consideremos, en primer lugar, el plano (bidimensional) y todos los vectores libres que podemos considerar en él.

Una **base de vectores** del plano, $\mathcal{B}$, está formada por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que son linealmente independientes y tales que, a partir de combinaciones lineales de ellos, podemos obtener todos los demás vectores del plano *de forma única*. Es decir, dado el vector $\vec{z}$ lo podemos escribir *de forma única* en la forma:

$$\vec{z} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}.$$

Los números *únicos* α y β se denominan **coordenadas** de $\vec{z}$ respecto a la base $\mathcal{B}$. En una base, el orden en que se colocan los vectores (primero, segundo, etc.) es importante, por lo que se denota con paréntesis de la siguiente forma: $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$.

La base más utilizada en el plano es la **base canónica**, $\mathcal{B}_0$, formada por los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, que como sabemos tienen módulo 1 y son paralelos a los ejes X e Y , respectivamente.

Si consideremos a continuación el espacio (tridimensional) y todos los vectores libres que podemos considerar en él, una base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ está formada por tres vectores linealmente independientes que permiten generar todos los demás vectores del espacio mediante combinaciones lineales, con lo que se definen sus (tres) coordenadas, *de manera única*. La correspondiente base canónica del espacio es $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En lo que sigue consideraremos siempre estas bases canónicas.

1.3. Producto escalar de dos vectores - en el plano o en el espacio

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres en el plano, cuyas coordenadas en la base canónica son (u_1, u_2) y (v_1, v_2) , respectivamente. Se llama **producto escalar** de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Si consideramos que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están en el espacio, con coordenadas respectivas, (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) , su producto escalar se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

En ambos casos, este valor numérico coincide con:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

A partir del producto escalar, podemos describir el **módulo de un vector**. Este se calcula mediante la fórmula:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

En el caso del plano, esto se escribe como:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

como ya sabemos y en el caso del espacio:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Si el módulo del vector $\vec{u}$ es 1, se dice que $\vec{u}$ es **unitario**.

A partir de cualquier vector $\vec{u}$, se puede obtener un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{u}$, sin más que dividir dicho vector por su módulo. Este proceso se denomina **normalización del vector**:

$$\vec{u}_{unitario} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Además, a partir del producto escalar también podemos determinar el **ángulo entre dos vectores** con la expresión:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

De aquí se deduce que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, los vectores forman un ángulo de 90° , es decir, son perpendiculares. El término más habitual para expresar esto es decir que los vectores son **ortogonales**.

2. Matrices

Una **matriz de tamaño o de dimensión $m \times n$** es una disposición rectangular en m filas y n columnas de números reales (¡o complejos!), denominados *elementos* o entradas. Las matrices se suelen indicar con letras mayúsculas, mientras que los elementos de las mismas se denotan con letras minúsculas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Así, el elemento (i, j) de la matriz, es decir, el que ocupa la posición dada por la i -ésima fila y la j -ésima columna, se representa mediante a_{ij} .

Algunas definiciones conocidas son las siguientes:

- Una matriz de dimensión $m \times m$ se denomina **matriz cuadrada**.
- Una matriz de dimensión $m \times 1$, es decir, que consta de una única columna, a menudo se denomina *vector columna*; del mismo modo, una matriz de dimensión $1 \times m$, es decir, que consta de una única fila, se denomina *vector fila*.
- La **diagonal principal** de una matriz A de dimensión $\boxed{m \times n}$ está formada por los elementos de la forma a_{ii} , para $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$.
- Una matriz cuadrada cuyas entradas por encima de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular inferior**. Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $j > i$. Una matriz cuadrada cuyas entradas por debajo de su diagonal principal son cero se llama **matriz triangular superior**. Es decir, $a_{ij} = 0$ para todo $j < i$.
- Una matriz de dimensión $m \times n$ con todas las entradas iguales a cero se denomina **matriz cero** y la representamos por $0_{m \times n}$.
- Una matriz **cuadrada** de dimensión $n \times n$ con todas las entradas iguales a cero excepto las de la diagonal principal, que valen 1, se denomina **matriz identidad** y se representa mediante I_n .
- Dados los vectores columna $v_1, \dots, v_p$, llamamos **combinación lineal** de estos vectores a una expresión de la forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son números reales. Decimos que los vectores $v_1, \dots, v_p$ son **linealmente independientes** si, de la expresión $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0$, se deduce que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.
- Llamamos **rango de una matriz** A (y lo denotamos por $rg(A)$) al número de columnas linealmente independientes de la matriz. Este número coincide con el

número de filas linealmente independientes de A .

2.1. Operaciones con matrices

A continuación describimos distintas operaciones que involucran matrices y recordamos algunas de sus propiedades más importantes.

Suma de matrices

Dadas las matrices A y B de tamaño $m \times n$, definimos la **suma de A y B** , y lo representamos por $A + B$, como la matriz cuyo elemento (i, j) es $a_{ij} + b_{ij}$.

La suma de matrices es conmutativa:

$$A + B = B + A.$$

Producto por un número (real)

Dados el número α y la matriz A de tamaño $m \times n$, definimos el **producto de α por A** , y lo representamos por αA , mediante la matriz cuyo elemento (i, j) es αa_{ij} .

Producto de matrices

Dadas las matrices A , de tamaño $m \times n$ y B , de tamaño $n \times p$, donde el número n de columnas de A es igual al número de filas de B , el **producto $C = A B$** existe y tiene dimensión $m \times p$ (aunque $B A$ puede existir o no). Normalmente no se escribe el signo de multiplicación.

Si $C = (c_{ij})$ escribimos:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Es decir, el elemento c_{ij} del producto es el **producto escalar** de la i -ésima fila de A ($a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$) y la j -ésima columna de B ($b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$).

La multiplicación de matrices **NO es conmutativa en general**, es decir, *normalmente* $AB \neq BA$, incluso si las matrices A y B son cuadradas.

2.2. Traspuesta de una matriz

Cualquier matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$ tiene una única matriz **traspuesta**, representada por A^t , de tamaño $n \times m$, cuyo elemento (i, j) es a_{ji} . Obviamente, la primera fila de A es la primera columna de A^t ; la segunda fila de A es la segunda columna de A^t y así sucesivamente.

2.3. Inversa de una matriz cuadrada

Consideremos una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$. Si A tiene rango n , se dice que A es **no singular**; si su rango es menor que n , la llamaremos matriz **singular**. En el caso de que A sea no singular, podemos asociarle una matriz especial.

Toda matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$ no singular (i.e., de rango n) tiene una **matriz inversa**, de dimensión $n \times n$, denotada por A^{-1} , que satisface:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Una matriz con inversa se dice que es **invertible**.

2.4. Determinantes de matrices cuadradas

Sabemos que toda matriz *cuadrada* A de dimensión $n \times n$ tiene asociado un número llamado **determinante**, denotado por $\det(A)$ ó $|A|$, calculado a partir de los elementos de

la matriz. Para matrices 3×3 podemos usar la regla de Sarrus, pero esta no funciona para matrices de tamaño mayor. El siguiente método puede utilizarse para matrices de cualquier tamaño.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $n \times n$, se tiene que para cualquier fila $1 \leq i \leq n$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}^A,$$

donde C_{ij}^A , se define mediante la fórmula

$$C_{ij}^A = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}^A)$$

y M_{ij}^A es la matriz que se obtiene de A al eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna. El desarrollo también puede hacerse por columnas. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para calcular su determinante podemos escoger cualquier fila o columna; si consideramos por ejemplo la primera fila, tenemos:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 2 + 0 \times 0 = -4.$$

A efectos prácticos, es útil buscar una fila o columna con muchos ceros, porque ahorramos cálculos. Por ejemplo, si utilizamos la columna 2, bastaría con calcular:

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 2 = -4.$$

En general:

- Para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de dimensión 2×2 el determinante sería:

$$\det(A) = ad - bc.$$

- Para una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión 3×3 el determinante sería:

$$\det(A) = a_{11} C_{11}^A + a_{12} C_{12}^A + a_{13} C_{13}^A.$$

o también, por ejemplo: $\det(A) = a_{21} C_{21}^A + a_{22} C_{22}^A + a_{23} C_{23}^A$ ó $\det(A) = a_{13} C_{13}^A + a_{23} C_{23}^A + a_{33} C_{33}^A$.

- Si $A = (a_{ij})$ es 4×4 , evaluando con la primera fila tendremos:

$$\det(A) = a_{11} C_{11}^A + a_{12} C_{12}^A + a_{13} C_{13}^A + a_{14} C_{14}^A,$$

donde cada uno de los cofactores $C_{11}^A, C_{12}^A, C_{13}^A, C_{14}^A$ se obtiene con la definición del determinante de una matriz 3×3 , etc., y así sucesivamente.

Algunas propiedades fundamentales de los determinantes son:

1. Si A tiene dos filas o dos columnas iguales, $\det(A) = 0$.
2. $\det(I_n) = 1$.
3. $\det(A) = 0$ si y sólo si A es singular.
4. $\det(A B) = \det(A) \det(B)$.
5. $\det(A^t) = \det(A)$.

6. Si A^{-1} existe entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
7. Si A^{-1} existe entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{adj}(A)^t$, donde $\text{adj}(A)$ es la **matriz adjunta** de A que se obtiene sustituyendo cada entrada a_{ij} en A por C_{ij}^A .

3. Sistemas de ecuaciones

Una **ecuación lineal** de n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ y b son números (reales) conocidos. Los primeros se llaman **coeficientes** y el último, **término independiente**. Obsérvese que todas las incógnitas están elevadas a lo sumo a 1. Una **solución** de una ecuación lineal con n incógnitas es una colección ordenada de valores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que al ser sustituida en la expresión de la ecuación, hacen que esta se convierta en una identidad.

Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas está formado por m ecuaciones lineales en las mismas incógnitas, de las que se busca una solución común:

$$\left. \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\}.$$

Los términos $a_{i,j}$ (coeficientes) y b_i (términos independientes), con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$ son números reales (conocidos).

Una solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es una colección ordenada de valores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que verifican las m ecuaciones a la vez. **Resolver el sistema** es encontrar una solución. Dos sistemas con la misma solución se llaman **sistemas equivalentes**.

Si todos los valores b_i son iguales a cero, el sistema se llama **homogéneo**, y verifica que siempre tiene al menos una solución: $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$, que se conoce como **solución trivial**. Pueden existir más soluciones para un sistema homogéneo, pero la trivial siempre existe.

3.1. Notación matricial

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir en **forma matricial** del siguiente modo: $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$. La matriz $\mathbb{A}$ se llama **matriz del sistema**, es de dimensión $m \times n$ y sus elementos son los coeficientes de las incógnitas. La matriz $\mathbb{X}$ es una matriz columna, de dimensión $n \times 1$, formada por las incógnitas del sistema. Por último, la matriz $\mathbb{B}$ es otra matriz columna, de dimensión $m \times 1$, formada por los términos independientes. Es decir:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}; \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Además, se llama **matriz ampliada** del sistema, la cual representaremos por $\mathbb{A}^*$, a la matriz de dimensión $m \times (n + 1)$ que se obtiene a partir de la matriz $\mathbb{A}$, añadiéndole la columna formada por los términos independientes, es decir:

$$\mathbb{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right);$$

3.2. Clasificación de sistemas

Los sistemas lineales pueden clasificarse según el número de soluciones que tengan de la siguiente manera:

- si el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**;
- si el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado**;
- si el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible**.

Discutir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas consiste en estudiar cuántas soluciones tiene. Determinar cuántas soluciones existen no implica que las calculemos en el proceso de estudio.

Para discutir un sistema podemos utilizar el **teorema de Rouché-Fröbenius**:

Sean $\mathbb{A}$ la matriz del sistema y $\mathbb{A}^*$ su matriz ampliada. La **condición necesaria y suficiente para que un sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas **sea compatible** es que el rango de la matriz $\mathbb{A}$ sea igual al rango de la matriz ampliada ($\mathbb{A}^*$). Es decir:

$$rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*).$$

Si el valor común de los rangos coincide con n , el sistema es compatible determinado. Si, por el contrario, el valor de los rangos es menor que n el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = n$: **sistema compatible determinado** (única solución).
- Si $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) < n$: **sistema compatible indeterminado** (infinitas soluciones).
- Si $rg(\mathbb{A}) \neq rg(\mathbb{A}^*)$: **sistema incompatible** (ninguna solución).

3.3. Métodos de resolución de sistemas lineales

Existen distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, como el método de Gauss, el método de Cramer o el cálculo de la matriz inversa.

REGLA DE CRAMER

Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de sistema de Cramer cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
2. El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero ($\det(\mathbb{A}) \neq 0$).

Un sistema de Cramer es, por definición, compatible determinado, puesto que se cumple que $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{A}^*) = n$ (número de incógnitas).

Consideremos un sistema de Cramer, es decir, un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Llamaremos matriz asociada a la incógnita x_i y la designaremos por $\mathbb{A}_i$ a la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz del sistema la columna i por la matriz columna de los términos independientes. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la matriz asociada a dicha incógnita por la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas):

$$x_i = \frac{\det(\mathbb{A}_i)}{\det(\mathbb{A})}.$$

Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo. Sea el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

La matriz del sistema es $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $\mathbb{A}^* =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Como $\det(\mathbb{A}) = -7 \neq 0$ podemos utilizar el método de Cramer. Podemos hallar la solución única mediante las siguientes operaciones:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(\mathbb{A})} = \frac{-7}{-7} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(\mathbb{A})} = \frac{7}{-7} = -1;$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(\mathbb{A})} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss es una generalización del método de reducción, que utilizamos para eliminar una incógnita en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en la aplicación sucesiva del método de reducción, utilizando las siguientes reglas, que permiten obtener sistemas equivalentes:

- Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de cero.
- Cambiar el orden de las filas.

Así transformamos la matriz ampliada $\mathbb{A}^*$ en una matriz triangular superior, de modo que cada fila (ecuación) tenga (al menos) una incógnita menos que la inmediatamente anterior. Se obtiene así un sistema, que llamaremos escalonado, tal que, en general, la última ecuación tiene una única incógnita, la penúltima dos incógnitas, la antepenúltima tres incógnitas, ..., y la primera todas las incógnitas.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, partimos de la matriz ampliada del sistema:

$$\mathbb{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Podemos intercambiar las filas 1 y 3:

$$\mathbb{A}^* \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

Podemos sustituir la fila 2 por el resultado de sumar las filas 1 y 2:

$$\mathbb{A}^* \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

Podemos sustituir la fila 3 por el resultado de restar la fila 3 a la fila 1 multiplicada por 2:

$$\mathbb{A}^* \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array} \right).$$

Podemos sustituir la fila 3 por el resultado de sumar la fila 2 y la fila 3 multiplicada por 4:

$$\mathbb{A}^* \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right).$$

De la última fila se deduce que $-7x_3 = -7$, por lo que $x_3 = 1$.

De la segunda fila se deduce que $4x_2 + 5x_3 = 1 \Rightarrow 4x_2 + 5 = 1 \Rightarrow 4x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -1$

Finalmente, de la primera fila se deduce que $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 - 1 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, como ya sabíamos.

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Consideremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas: $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$ ($\mathbb{A}$ es de tamaño $n \times n$). Si el determinante de la matriz $\mathbb{A}$ es distinto de cero ($\det(\mathbb{A}) \neq 0$), la matriz $\mathbb{A}$ tiene inversa, $\mathbb{A}^{-1}$. Por lo tanto, podemos calcular la solución $\mathbb{X}$ del siguiente

modo:

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}.$$

Ejemplo. En nuestro ejemplo, podemos calcular la inversa de la matriz $\mathbb{A}$ y obtener:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 13 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Entonces de nuevo obtenemos la solución:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 13 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$